МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
« 14 » января 2020 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

_________________________В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по самостоятельной работе студентов
по дисциплине (модулю)
" Математическая составляющая естественнонаучных дисциплин "

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
38.03.01 Экономика

с направленностью (профилем)
Внешнеэкономическая деятельность

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 380301-04-20

Тула 2020 год

Разработчик методических указаний

Белая Л.А., доцент, к.т.н. ___________________
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

СОДЕРЖАНИЕ

1. МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛЬ

1.1. Определение и свойства модуля действительного числа.

Определение: модулем числа x называется расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки x. **Модуль действительного числа** - это абсолютная величина этого числа.

Попросту говоря, при взятии модуля нужно отбросить от числа его знак.

Модуль числа а обозначается |a|. Обратите внимание: модуль числа всегда неотрицателен: |a|≥ 0.

|6| = 6, |-3| = 3, |-10,45| = 10,45

Определение модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

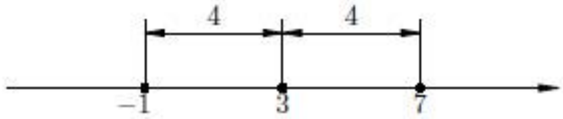
Свойства модуля

1. Модули противоположных чисел равны	$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$
2. Квадрат модуля числа равен квадрату этого числа	$\lvert a\rvert^2 = a^2$
3. Квадратный корень из квадрата числа есть модуль этого числа	$\sqrt{a^2} = \lvert a\rvert$ $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a\rvert$
4. Модуль числа есть число неотрицательное	$\lvert a\rvert \geq 0$
5. Постоянный положительный множитель можно выносить за знак модуля	$\lvert c \cdot x\rvert = c \cdot \lvert x\rvert$ $c>0$
6. Если $\lvert a\rvert = \lvert b\rvert$, то	$a = \pm b$
7. Модуль произведения двух (и более) чисел равен произведению их модулей	$\lvert a \cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$

Рассмотрим простейшее уравнение $|x| = 3$. Мы видим, что на числовой прямой есть две точки, расстояние от которых до нуля равно трём. Это точки 3 и -3. Значит, у уравнения $|x| = 3$ есть два решения: $x = 3$ и $x = -3$.

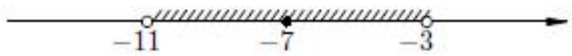
Пример 1. Решить уравнение $|x — 3| = 4$.

Это уравнение можно прочитать так: расстояние от точки *x* до точки 3 равно 4. С помощью графического метода можно определить, что уравнение имеет два решения: -1 и 7.



Пример 2. Решим неравенство: $|x + 7| < 4$.

Можно прочитать как: расстояние от точки *x* до точки -7 меньше четырёх. <u>Ответ:</u> (-11; -3).



Пример 3. Решим неравенство: $|10 — x| \geq 7$.

Расстояние от точки 10 до точки *x* больше или равно семи.

<u>Ответ:</u> $(-\infty; 3]$ $[17, +\infty)$

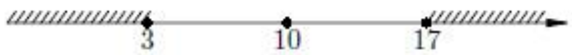


График функции y = |x|

Для $x \geq 0$ имеем $y = x$. Для $x < 0$ имеем $y = -x$.

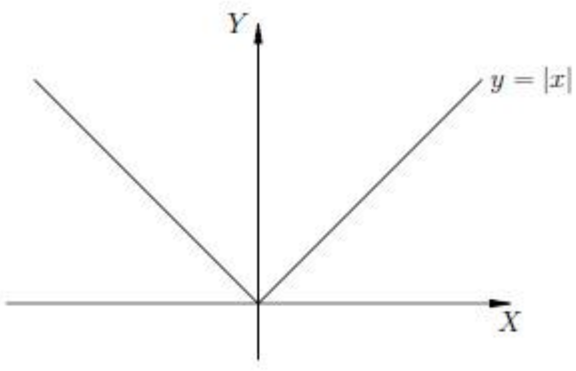


Рис. 1.1 График функции y = |x|

1.2. Решение уравнений и неравенств, содержащих модуль.

Уравнения, содержащие модуль.

1. Уравнения вида $|f(x)| = A, \quad A \in R$ **решаются следующим образом.**

Если $A < 0$, то корней нет.

Если $A = 0$, то уравнению $|f(x)| = A$ соответствует уравнение $f(x) = 0$.

Если $A > 0$, то уравнению $|f(x)| = A$ соответствует равносильная совокупность $\left\{\begin{array}{l} f(x) = A \\ f(x) = -A \end{array}\right.$.

2. Уравнения вида $|f(x)| = g(x)$ **решаются следующим образом.**

Уравнению $|f(x)| = g(x)$ соответствует равносильная совокупность систем

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ -f(x) = g(x) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

3. Уравнения вида $|f(x)| = |g(x)|$ **решаются следующим образом.**

Способ №1

Уравнению $|f(x)| = |g(x)|$ соответствует равносильное уравнение

$$f^2(x) = g^2(x)$$

Способ №2

Уравнению $|f(x)| = |g(x)|$ соответствует равносильная совокупность

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

4. Уравнения вида $|f(x)| = -f(x)$ **и** $|f(x)| = f(x)$ **решаются следующим образом.**

Уравнению $|f(x)| = -f(x)$ соответствует равносильное неравенство $f(x) \leq 0$.

Уравнению $|f(x)| = f(x)$ соответствует равносильное неравенство $f(x) \geq 0$.

Пример 4. Решить уравнение $|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = 3$

Решение. Найдем нули выражений, стоящих под знаком модуль.

$x = \pm 1 \qquad x = \pm 2$

I) $\begin{cases} x \le -2 \\ x^2 - 1 + x^2 - 4 = 3 \end{cases}$ II) $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ x^2 - 1 - x^2 + 4 = 3 \end{cases}$ III) $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -x^2 + 1 - x^2 + 4 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x \le -2 \\ x = \pm 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ 3 = 3\ ,\textit{верно} \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

$x = -2$ $(-2;-1)$ - промежуток $x = \pm 1$

IV) $\begin{cases} 1 < x < 2 \\ x^2 - 1 - x^2 + 4 = 3 \end{cases}$ V) $\begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 1 + x^2 - 4 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 < x < 2 \\ 3 = 3\ ,\textit{верно} \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 2 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

$(1;2)$ - промежуток $x = 2$

Ответ: $[-2;-1] \cup [1;2]$

Пример 5. Найти сумму корней уравнения $\left|\, x + 1 + |-x-3| \,\right| - 6 = x$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} -x - 3 \ge 0, \\ |x + 1 + (-x-3)| - 6 = x \end{cases} \text{ и } \begin{cases} -x - 3 < 0, \\ |x + 1 - (-x-3)| - 6 = x, \end{cases} \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} x \le -3, \\ x = -4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -3, \\ |2x + 4| - 6 = x. \end{cases}$$

Решением первой системы совокупности является число $x = -4$.

Вторая система совокупности равносильна совокупности двух следующих систем:

$$\begin{cases} x > -3, \\ 2x + 4 \ge 0, \\ 2x + 4 - 6 = x, \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -3, \\ 2x + 4 < 0, \\ -(2x+4) - 6 = x, \end{cases} \quad \text{т.е.}$$

$$\begin{cases} x > -3, \\ x \ge -2, \\ x = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -3, \\ x < -2, \\ 3x = -10. \end{cases}$$

Решением первой системы совокупности является число $x = 2$, а вторая система решений не имеет. Исходное уравнение имеет два корня: $-4;\ 2$.

Ответ: 2.

Неравенства, содержащие модуль.

Основной метод при решении неравенств, содержащих знак модуля, заключается в следующем. ОДЗ неравенства разбивают на части, на каждой из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. На каждой такой части решают неравенство и полученные решения объединяют в множество решений исходного неравенства.

1. Неравенство вида $|f(x)| < g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, можно решать основным методом или сведением к равносильному ему двойному неравенству:

   $$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x).$$

2. Неравенство вида $|f(x)| > g(x)$ можно решать основным методом или заменой на равносильную ему совокупность двух неравенств: $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

3. Неравенства вида $|f(x)| > |g(x)|$ и $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_n(x)| > g(x)$ решаются методом интервалов (метод описан в пункте 3.3) по той же схеме, что и аналогичные уравнения. Некоторые неравенства вида $|f(x)| > |g(x)|$ целесообразно решать, перейдя к равносильному неравенству $f^2(x) > g^2(x)$.

Пример 6. Найти число целых решений неравенства: $x^2 + 4x - 5|x+2| \le 2$.

Решение. ОДЗ неравенства: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Неравенство равносильно совокупности двух систем:

1) $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x^2+4x-5(x+2)\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x^2-x-12\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ (x-4)(x+3)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ -3\leq x\leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2\leq x\leq 4$.

2) $\begin{cases} x+2< 0 \\ x^2+4x+5(x+2)\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x< -2 \\ x^2+9x+8\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x< -2 \\ (x+1)(x+8)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x< -2 \\ -8\leq x\leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -8\leq x< -2$.

Множеством решений неравенства является объединение множеств $-8\leq x<-2$ и $-2\leq x\leq 4$, т.е. отрезок $-8\leq x\leq 4$. Этот отрезок содержит 13 целых чисел: $-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4$.

Ответ: 13.

Пример 7. Найти длину интервала решений неравенства: $\left|x^2-x\right|<2$.

Решение. Данное неравенство равносильно двойному неравенству $-2<x^2-x<2$, т.е. системе $\begin{cases} x^2-x<2, \\ x^2-x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2<0, \\ x^2-x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2)<0, \\ x^2-x+2>0. \end{cases}$

Неравенство $(x+1)(x-2)<0$ выполняется при $x\in(-1;2)$, а неравенство $x^2-x+2>0$ выполняется при любом x (т.к. коэффициент при x^2 больше нуля и $D=1-8=-7<0$).

Таким образом, множество решений исходного неравенства есть интервал $(-1;2)$. Длина этого интервала: $l=3$.

Ответ: 3.

2. ДЕЙСТВИЯ СО СТЕПЕНЯМИ И РАДИКАЛАМИ. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

2.1. Действия со степенями и радикалами. Упрощение выражений.

Обыкновенная дробь – число вида $\frac{a}{b}$; a – целое число, b – натуральное число. Две дроби $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ равны, если $a\cdot d=b\cdot c$. Основное свойство дробей $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$, где c – любое отличное от нуля действительное число.

Основное свойство пропорции: $a\cdot d=b\cdot c$ (в верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних членов).

Действия с дробями:

Сложение	Вычитание	Умножение	Деление
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Перестановка членов пропорции:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$;	$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$;	$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$;	$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$.

Производные пропорции.

Дана пропорция $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, справедливы следующие пропорции:

$\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$;	$\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Формулы сокращенного умножения:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$
$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot \left(a^2 \mp a \cdot b + b^2\right)$

Формулы корней квадратного уравнения

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, дискриминант $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$		
$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}$	$x_{1,2} = \dfrac{-b}{2 \cdot a}$	Среди действительных чисел корней нет

Если задано квадратное уравнение в общем виде: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, то делением уравнения на $a \neq 0$ можно свести к приведенному, где $p = \dfrac{b}{a}$, $q = \dfrac{c}{a}$.

Формулы корней приведенного квадратного уравнения

$x^2 + p \cdot x + q = 0$, дискриминант $D_0 = \dfrac{p^2}{4} - q$		
$D_0 > 0$	$D_0 = 0$	$D_0 < 0$
$x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{D_0}$	$x_{1,2} = -\dfrac{p}{2}$	Среди действительных чисел корней нет

Теорема Виета. В приведенном квадратном уравнении $x^2 + p \cdot x + q = 0$ сумма корней равна коэффициенту при x, взятому с противоположным знаком, а их произведение – свободному члену:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Обратная теорема. Если числа t_1 и t_2 таковы, что $t_1 + t_2 = -p$, $t_1 t_2 = q$, то они являются корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители: если x_1 и x_2 корни квадратного уравнения, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Действия со степенями:

$(a\cdot b\cdot c)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n$	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$\frac{1}{a^n}=\frac{a^0}{a^n}=a^{-n}$

Действия с корнями (корни предполагаются арифметическими):

$\sqrt[m]{a\cdot b\cdot c}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}\cdot\sqrt[m]{c}$	$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$	$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[m\cdot p]{a^{n\cdot p}}$	$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p=\sqrt[m]{a^{n\cdot p}}$	$\sqrt[m]{a^n}\cdot\sqrt[p]{a^q}=\sqrt[m\cdot p]{a^{n\cdot p+m\cdot q}}=$ $=a^{\frac{n}{m}+\frac{q}{p}}=a^{\frac{n\cdot p+m\cdot q}{m\cdot p}}$
$\sqrt[2n]{a^{2n}}=\lvert a\rvert$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a,\ (a\ge 0)$	$\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a},\quad (a\ge 0)$

Свойства числовых неравенств

$a\ge b\ \Leftrightarrow\ b\le a,\qquad a\ge b$ и $b\ge c\ \Rightarrow\ a\ge c$,

$a\ge b\ \Leftrightarrow\ a+c\ge b+c,\qquad a^2\ge b^2\ \Leftrightarrow\ \lvert a\rvert\ge\lvert b\rvert$,

пусть $c>0$, тогда $a\ge b\Leftrightarrow a\cdot c\ge b\cdot c$,

пусть $c<0$, тогда $a\ge b\Leftrightarrow a\cdot c\le b\cdot c$,

пусть $a>0\ b>0$, тогда $a\ge b\Leftrightarrow\frac{1}{a}\le\frac{1}{b}$.

2.2. Тождественные преобразования алгебраических выражений.

Алгебраическим выражением называется выражение, в котором числа и буквы соединены действиями сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень или извлечения арифметического корня.

Равенство, обе части которого принимают одинаковые числовые значения при любых допустимых значениях входящих в него букв, называется тождеством.

Например, каждая из формул сокращенного умножения представляет собой тождество, ибо левая и правая части каждого из равенств:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2 \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) \qquad a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot \left(a^2 \mp a \cdot b + b^2\right)$$

равны друг другу при любых значениях a и b. При этом одно выражение преобразуется в другое – ему тождественно равное.

При выполнении тождественных преобразований алгебраических выражений необходимо знать порядок выполнения действий, действия с дробями и степенными выражениями, формулы сокращенного умножения и др.

Следует иметь в виду, что при тождественных преобразованиях остаются неизменными:

- величина допустимых изменений буквенных величин;
- область допустимых значений каждой из буквенных величин.

Первое из этих требований является обязательным при всех преобразованиях, имеющих целью упрощение выражения или приведение его к нужному виду. Если надо, например, дополнить квадратный трехчлен $x^2 + 6 \cdot x - 7$ до полного квадрата, то, прибавив к нему число 9, необходимо такое же число и вычесть, т.е.

$$x^2 + 6 \cdot x - 7 = x^2 + 6 \cdot x + 9 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16 \cdot$$

Тождественные преобразования последнего выражения можно продолжить и привести исходное выражение к произведению двучленов:

$$(x + 3)^2 - 16 = (x + 3 + 4) \cdot (x + 3 - 4) = (x + 7) \cdot (x - 1)$$

Второе требование – неизменность областей допустимых значений, не всегда выполняется при обычно применяемых нами преобразованиях. Сократив, например, дробь $\frac{a^2-1}{a-1}$ на разность $a-1$ и написав равенство $\frac{a^2-1}{a-1}=a+1$, мы замечаем, что нарушено второе требование, которому должно удовлетворять тождественное преобразование: правая часть равенства имеет смысл при любых значениях a, а левая только при условии, что $a \neq 1$, т.е. произошло изменение области допустимых значений величины a. Следовательно, преобразование в данном случае не является тождественным.

Однако это не значит, что нужно отказываться от таких преобразований, которые изменяют области допустимых значений величин. Надо только при каждом таком преобразовании указать, как изменились области допустимых значений буквенных величин.

<u>Порядок выполнения действий</u>:

- действия с одночленами;
- действия в скобках;
- умножение или деление (в порядке появления);
- сложение или вычитание (в порядке появления).

При действиях с радикалами следует иметь в виду, что правила, по которым они выполняются, безоговорочно верны лишь для арифметических корней. По определению корень $\sqrt[n]{a}$ называется арифметическим лишь в том случае, если число a положительно или нуль, а также положительна или равна нулю и величина самого корня. Если этого не учитывать, то можно допустить ошибку. Например, равенство $\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ верно лишь при условии, что $x \geq 0$. При $x<0$ нужно писать так: $\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[3]{-x}$.

Аналогично равенство $\sqrt[6]{(a-b)^2}=\sqrt[3]{(a-b)}$ верно лишь в случае, если $a \ge b$. При $a<b$ оно неверно и нужно писать $\sqrt[6]{(a-b)^2}=\sqrt[3]{(b-a)}$. Оба случая можно охватить такой записью: $\sqrt[6]{(a-b)^2}=\sqrt[3]{|a-b|}$.

Пример 1. Вычислить: $-3{,}25:\left(-5\frac{1}{5}\right)+6{,}75\cdot\left[\frac{47}{60}-2\frac{17}{45}-1{,}65\right]$.

Решение. Указанные действия надо выполнить, не пользуясь микрокалькулятором, не делая округлений и приближенных вычислений, так как предполагается, что все заданные числа являются точными.

Будем выполнять вычисления по действиям:

1) $-3{,}25:\left(-5\frac{1}{5}\right)=-3\frac{1}{4}:\left(-5\frac{1}{5}\right)=\frac{13}{4}:\frac{26}{5}=\frac{13\cdot 5}{4\cdot 26}=\frac{5}{8}$.

2) $\frac{47}{60}-2\frac{17}{45}-1{,}65=\frac{47}{60}-\frac{107}{45}-\frac{165}{100}=\frac{47}{60}-\frac{107}{45}-\frac{33}{20}=\frac{47\cdot 3-107\cdot 4-33\cdot 9}{180}=$

$$=\frac{141-428-297}{180}=\frac{-584}{180}=-\frac{146}{45}.$$

3) $6{,}75\cdot\left(-\frac{146}{45}\right)=6\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{146}{45}\right)=-\frac{27}{4}\cdot\frac{146}{45}=-\frac{3\cdot 73}{2\cdot 10}=-\frac{219}{10}=-21{,}9$.

4) $\frac{5}{8}-21{,}9=0{,}625-21{,}9=-20{,}275$.

Таким образом, $-3{,}25:\left(-5\frac{1}{5}\right)+6{,}75\cdot\left[\frac{47}{60}-2\frac{17}{45}-1{,}65\right]=-20{,}275$.

Ответ: -20,275.

Пример 2. Упростить выражение: $S=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$, при $x=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$, $a \ne b$ и $ab>0$.

Решение. Покажем прежде, что при заданном условии все подкоренные выражения положительны:

$$x-1=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-1=\frac{a^2+b^2-2ab}{2ab}=\frac{(a-b)^2}{2ab},$$

поскольку $a-b\neq 0$, то $(a-b)^2>0$; $ab>0$ по условию.

Следовательно, дробь $\frac{(a-b)^2}{2ab}$ положительна, т.е. $x-1>0$, а значит, и $x+1>0$.

Теперь перейдем к упрощению заданного выражения. Освободимся от иррациональности в знаменателе:

$$S=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=$$
$$\frac{x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1}{x+1-x+1}==x+\sqrt{x^2-1}.$$

Подставляя значение $x=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=\frac{a^2+b^2}{2ab}$, получим

$$S=\frac{a^2+b^2}{2ab}+\sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4a^2b^2}-1}=\frac{a^2+b^2}{2ab}+\sqrt{\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{4a^2b^2}}=\frac{a^2+b^2}{2ab}+\frac{\left|a^2-b^2\right|}{2\cdot|ab|}.$$

По условию $ab>0$, значит, $|ab|=ab$, поэтому $S=\frac{a^2+b^2+\left|a^2-b^2\right|}{2ab}$.

Рассмотрим оба возможных случая:

1) если $a^2>b^2$, т.е. если $|a|>|b|$, то $\left|a^2-b^2\right|=a^2-b^2$ и $S=\frac{a}{b}$;

2) если $a^2<b^2$, т.е. если $|a|<|b|$, то $\left|a^2-b^2\right|=-a^2+b^2$ и $S=\frac{b}{a}$.

Пример 3. Сократить дробь: $\frac{x^2-5x+4}{x^3-x-4x^2+4}$.

<u>Решение.</u> Разложим числитель и знаменатель на множители. Корни числителя: $x_1=1$; $x_2=4$, поэтому, имеем: $x^2-5x+4=(x-1)\cdot(x-4)$.

Чтобы разложить знаменатель на множители, применим метод группировки:

$$x^3 - x - 4x^2 + 4 = \left(x^3 - x\right) - \left(4x^2 - 4\right) = x\left(x^2 - 1\right) - 4\left(x^2 - 1\right) = \left(x^2 - 1\right)\left(x - 4\right) =$$
$$= \left(x - 1\right)\left(x + 1\right)\left(x - 4\right).$$

Тогда при $x \neq 1,\ x \neq -1,\ x \neq 4$, будем иметь:

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - x - 4x^2 + 4} = \frac{\left(x - 1\right)\left(x - 4\right)}{\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)\left(x - 4\right)} = \frac{1}{x + 1}.$$

Пример 4: Пользуясь теоремой Виета, вычислить: $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$, где x_1 и x_2 - корни уравнения $2x^2 + 6x + 1 = 0$.

Решение. Преобразуем исходное выражение в дробь $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2}$. Числитель данного выражения может быть разложен, как сумма кубов двух выражений: $x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1 + x_2\right)\left(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2\right)$. Проведем тождественные преобразования:

$$\left(x_1 + x_2\right)\left(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2\right) = \left(x_1 + x_2\right)\left(x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 x_2\right) =$$
$$\left(x_1 + x_2\right)\left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 3x_1 x_2\right).$$

Воспользуемся теоремой Виета. Для начала убедимся, что дискриминант квадратного трехчлена $2x^2 + 6x + 1$ больше нуля.

Действительно: $D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 36 - 8 = 28 > 0$. Следовательно, у уравнения $2x^2 + 6x + 1 = 0$ имеются два действительных корня, и теорема Виета может быть применена.

Таким образом, $x_1 + x_2 = -\frac{6}{2} = -3$, и $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$. Поэтому, имеем:

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{\left(x_1 + x_2\right)\left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 3x_1 x_2\right)}{x_1 x_2} = \frac{\left(-3\right) \cdot \left(\left(-3\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \left(-6\right) \cdot \left(9 - \frac{3}{2}\right) = -45$$

3.СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

3.1. Определение и свойства степенных функций. Построение графиков степенных функций.

Функции $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=1/x$ и т. д. являются частными случаями степенной функции, т. е. функции $y= x^p$, где p - заданное действительное число.

Свойства и график степенной функции существенно зависит от того, при каких значениях x и p имеет смысл степень $y=x^p$. Перейдем к подобному рассмотрению различных случаев в зависимости от показателя степени p.

1) Показатель $p=2n$ - четное натуральное число. В этом случае степенная функция $y=x^{2n}$, где n - натуральное число, обладает следующими свойствами:

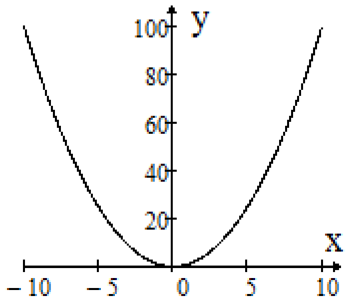


Рис. 3.1

- область определения - все действительные числа, т. е. множество R;
- множество значений - неотрицательные числа, т. е. у больше или равно 0;
- функция $y=x^{2n}$ четная, так как $x^{2n}=(-x)^{2n}$
- функция является убывающей на промежутке $x<0$ и возрастающей на промежутке $x>0$.

График функции $y=x^{2n}$ имеет такой же вид, как например график функции $y=x^2$ (Рис. 3.1)

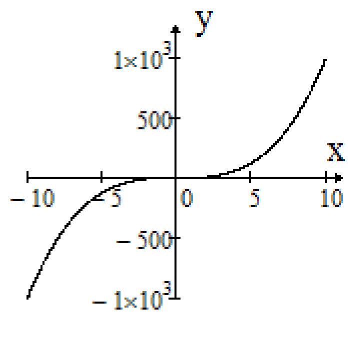


Рис. 3.2

2) Показатель $p=2n-1$ - нечетное натуральное число. В этом случае степенная функция $y=x^{2n-1}$, где натуральное число, обладает следующими свойствами:

- область определения - множество R;
- множество значений - множество R;

- функция $y=x^{2n-1}$ нечетная, так как $(-x)^{2n-1}=x^{2n-1}$;
- функция является возрастающей на всей действительной оси.

  График функции $y=x^{2n-1}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y=x^3$ (Рис. 3.2)

3) Показатель $p=-2n$, где n - натуральное число. В этом случае степенная функция $y=x^{-2n}=1/x^{2n}$ обладает следующими свойствами:

- область определения - множество R, кроме x=0;
- множество значений - положительные числа y>0;
- функция $y=1/x^{2n}$ четная, так как $1/(-x)^{2n}=1/x^{2n}$;
- функция является возрастающей на промежутке $x<0$ и убывающей на промежутке $x>0$.

  График функции $y=1/x^{2n}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y=1/x^2$ (Рис. 3.3).

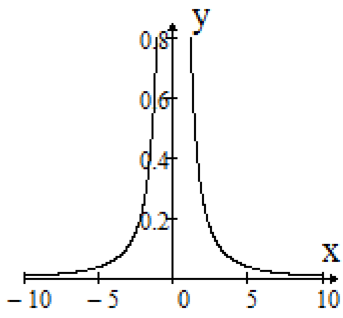


Рис.3.3

4) Показатель $p=-(2n-1)$, где n - натуральное число. В этом случае степенная функция $y=x^{-(2n-1)}$ обладает следующими свойствами:

- область определения - множество R, кроме $x=0$;
- множество значений - множество R, кроме $y=0$;
- функция $y=x^{-(2n-1)}$ нечетная, так как $(-x)^{-(2n-1)}=-x^{-(2n-1)}$;
- функция является убывающей на промежутках $x<0$ и $x>0$.

  График функции $y=x^{-(2n-1)}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y=1/x^3$ (Рис. 3.4)

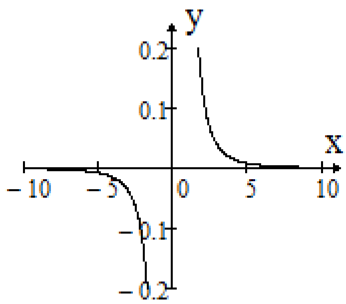


Рис. 3.4

3.2. Квадратные уравнения. Рациональные уравнения

Если выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, составлены лишь с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень, то уравнение называется **рациональным**.

Рациональное уравнение называется **целым**, или **алгебраическим**, если в нем нет деления на выражение, содержащее переменную. К целым уравнением относятся, например, линейные и квадратные уравнения.

Решением, или **корнем уравнения**, называется всякое значение неизвестного *x,* при подстановке которого в обе части уравнения получается истинное числовое равенство. **Решить уравнение** - значит найти все его корни или доказать, что корней нет. Решая уравнение, мы применяем к нему некоторые преобразования. Если исходное и преобразованное уравнения имеют одни и те же корни, то они называются **равносильными**. В частности, уравнения, которые не имеют корней, также считаются равносильными.

Основные теоремы преобразования уравнения в равносильное ему:

- Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.
- Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.
- Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:

  а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x)=g(x)$;

  б) нигде в этой области не обращается в 0, то получится уравнение $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$, равносильное данному.

Квадратные уравнения.

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0.$$

Функция $f(x)=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$, называется квадратичной функцией. График этой функции – парабола, координаты вершины которой равны: $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, $y_0=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$. При $a>0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a<0$ - вниз. Нахождение корней уравнения $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ подробно изложено в пункте 2.1.

Целые рациональные уравнения.

Многочленом n- ой степени ($n\in Z, n\geq 0$) от переменной x называется выражение

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n ,$$

где $a_0,a_1,\ldots,a_n$ – заданные действительные числа, причем $a_0\neq 0$. Многочленами нулевой степени являются отличные от нуля действительные числа. Число 0 единственный многочлен, степень которого не определена.

Уравнение $P_n(x)=0$, где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени, $n\geq 1$, называется алгебраическим уравнением n-ой степени.

Если x_0 – корень многочлена $P_n(x)$, т.е. $P_n(x_0)=0$, то $P_n(x)$ без остатка делится на ($x-x_0$):

$$P_n(x)=(x-x_0)P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x)$– многочлен степени $n-1$. Многочлен $P_{n-1}(x)$ можно найти либо делением «уголком» многочлена $P_n(x)$ на ($x-x_0$), либо группировкой слагаемых многочлена $P_n(x)$ и выделением из них множителя $x-x_0$. Основными методами решения уравнения $P_n(x)=0$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n ($n>2$), являются метод разложения левой части уравнения на множители и метод введения новой переменной.

Множество рациональных уравнений за типом и методом решения можно разделить на следующие:

1. Решение с помощью подстановки. При решении некоторых рациональных уравнений имеет смысл ввести новую переменную, заменив ею некое рациональное выражение. Например, в уравнении $aP^2(x) + bP(x) + c = 0$, где $P(x)$ - многочлен, введем новую переменную $y = P(x)$. Решаем квадратное уравнение $ay^2 + by + c = 0$ относительно y и возвращаемся к решению уравнений $P(x) = y_i$, где y_i - решения уравнения.

2. Распадающееся уравнение. Рациональное уравнение называется распадающимся, если его можно представить в виде $P(x)Q(x) = 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - целые рациональные функции. Для решения таких уравнений нужно представить уравнение $P(x)Q(x) = 0$ в виде совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} P_m(x)=0, \\ Q_n(x)=0. \end{array}\right.$$

3. Однородное уравнение второго порядка $aP^2(x) + bP(x)Q(x) + cQ^2(x) = 0$. Для его решения рассмотрим два случая. Первый - $Q(x) = 0$, тогда уравнение сводится к решению уравнения $P(x) = 0$. Второй случай - $Q(x) \neq 0$, тогда исходное уравнение можно поделить на $Q^2(x)$ и получить $a(P(x)/Q(x))^2 + bP(x)/Q(x) + c = 0$. Вводим замену $P(x)/Q(x) = t$ и получаем квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$. В ответ включаем решения обоих случаев.

4. Биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Для решения такого уравнения делается замена $x^2 = t$, $x^4 = t^2$. После подстановки новой переменной получаем квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$. Решив его, приходим к уравнению $x^2 = t_i$, где t_i - корни уравнения.

5. Симметричное уравнение третьего порядка $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$. Для его решения проведем следующие преобразования: $ax^3 + bx^2 + bx + a = a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a)$. В итоге получаем распадающееся уравнение, решаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ ax^2+(b-a)x+a=0. \end{array}\right.$$

6. Симметрическое уравнение четвертого порядка $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a =0$. Сгруппируем слагаемые и разделим обе части на x^2. Получим

$a(x^2 + 1/x^2) + b(x + 1/x)+ c = 0.$

Сделаем подстановку $x + 1/x = t$, тогда $x^2 + 1/x^2 = t^2 - 2$. Получаем квадратное уравнение $at^2 + bt + (c - 2a) = 0$. После его решения возвращаемся к исходной переменной x.

7. Возвратное уравнение. Уравнение вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $e/a = (d/b)^2$, называется возвратным уравнением четвертого порядка. Для его решения делим уравнение на x^2 и вводим переменную $t = bx + d/x$, после чего получаем квадратное уравнение $at^2/b^2 + t + c - 2ad/b = 0$. Решив его, возвращаемся к исходной переменной.

8. Уравнения вида $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$, *где* $a + b = c + d$. В данном случае вводим новую переменную $t = x^2 + (a + b)x$ и получаем квадратное уравнение $(t + ab)(t + cd) = m$. Решив его, возвращаемся к исходной переменной.

Пример 1. Решить уравнение $x^4 + 4x^2 - 21 = 0$.

Решение. Пусть $x^2 = y$, получим квадратное уравнение $y^2 + 4y - 21 = 0$, откуда находим $y_1 = -7$, $y_2 = 3$. Теперь задача сводится к решению уравнений $x^2 = -7$, $x^2 = 3$. Первое уравнение не имеет действительных корней, из второго находим $x_1 = -\sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{3}$ которые являются корнями заданного биквадратного уравнения.

Ответ: $x_1 = -\sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{3}$.

Пример 2. Решить уравнение $x^3 - x^2 + 2 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $x^3 + 1 - (x^2 - 1) = 0$. Но

$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ и $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Поэтому получаем:

$$(x+1)(x^2 - x + 1) - (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x^2 - 2x + 2 = 0. \end{array}\right.$$

Квадратное уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$ корней не имеет (т.к. $D = -4 < 0$). Следовательно, исходному уравнению удовлетворяет только значение $x = -1$.

Ответ: – 1.

Пример 3. Найти сумму корней уравнения: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24$.

Решение. Так как $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) =$

$= [(x+1)(x+4)] \cdot [(x+2)(x+3)] = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6)$, то исходное уравнение принимает вид:

$$\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)=24.$$

Обозначим $x^2+5x+4=y$. Тогда уравнение принимает вид:

$$y(y+2)=24 \Leftrightarrow y^2+2y-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-6, \\ y=4. \end{array}\right.$$

Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x+4=4, \\ x^2+5x+4=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x=0, \\ x^2+5x+10=0. \end{array}\right.$$

Первое уравнение имеет корни $x_1=0,\ x_2=-5$, а второе уравнение корней не имеет ($D=-15<0$). $S=0-5=-5$.

<u>Ответ:</u> –5.

Дробно-рациональные уравнения.

Уравнение вида $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=0$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ многочлены, называется рациональным. Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} P_m(x)=0, \\ Q_n(x)\neq 0. \end{cases}$

Общих методов решения дробно-рациональных уравнений, тем не менее, не существует. Решение очень многих из них основано на удачной группировке и последующем приведении сгруппированных слагаемых к общему знаменателю. В более простых случаях группировка не требуется, а иногда уравнение можно упростить, введя новую переменную. При решении рациональных уравнений возникает опасность получения посторонних решений, которая купируется либо проверкой, либо нахождением области допустимых значений, либо просто указанием соответствующих ограничений и дальнейшей проверкой их выполнения.

Решение дробно-рационального уравнения сводится в конечном итоге к замене исходного уравнения целым уравнением, которое равносильно исходному уравнению или является его следствием.

При решении дробного уравнения целесообразно поступать следующим образом:

1. определить область допустимых значений переменной *x* (ОДЗ);
2. найти наименьший общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
3. умножить обе части уравнения на общий знаменатель и привести подобные;
4. решить получившееся целое уравнение.

Решение некоторых видов дробно-рациональных уравнений:

1. **Уравнение вида P(x)/Q(x) = 0.** Решаем уравнение $P(x) = 0$. Проверяем, чему равно значение $Q(x_i)$, где x_i - корни уравнения $P(x) = 0$. Если $Q(x_i) \neq 0$, значит они являются решением исходного уравнения. Если $Q(x_i) = 0$ - корень выпадает из области определения исходного уравнения и его нужно исключить из ответа.
2. **Уравнение вида aP(x)/Q(x) + bQ(x)/P(x) + c = 0**. Вводим новую переменную $t = P(x)/Q(x)$ и получаем следующее уравнение: $at + b/t + c = 0$. Или после домножения на t ($t \neq 0$) получаем квадратное уравнение $at^2 + ct + b = 0$. Решив его, возвращаемся к исходной переменной.
3. **Уравнение состоящее из суммы дробей.** Один из методов состоит в том, что нужно перенести все члены уравнения в одну часть и свести уравнение к виду $P(x)/Q(x) = 0$.

Пример 4. Решить уравнение $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{6x-3}{x^2+x-2}$.

<u>Решение.</u> Квадратный трехчлен x^2+x-2 обращается в нуль при $x=-2$ и $x=1$; поэтому $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$.

$$\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x+2}=\frac{6x-3}{x^2+x-2} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}+\frac{1}{x+2}=\frac{3(2x-1)}{(x-1)(x+2)} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}+\frac{1}{x+2}-\frac{3(2x-1)}{(x-1)(x+2)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+2)+(x-1)-3(2x-1)}{(x-1)(x+2)}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x+2)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0, \\ (x-1)(x+2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x\neq -2;\,1 \end{cases} \Rightarrow x=2.$$

<u>Ответ:</u> 2.

Пример 5. Найти сумму корней уравнения

$$\frac{x^3-x^2-17x+30}{x-2}=2x-3.$$

<u>Решение.</u> ОДЗ уравнения: $x\neq 2$.

При $x=2$ числитель дроби, стоящей в левой части уравнения, обращается в 0: $2^3-2^2-17\cdot 2+30=0$. Следовательно, многочлен $x^3-x^2-17x+30$ без остатка делится на $x-2$:

$$\begin{array}{l|l}
x^3-x^2-17x+30 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-2x^2} & x^2+x-15 \\
\quad x^2-17x+30 & \\
\quad \underline{x^2-2x} & \\
\qquad -15x+30 & \\
\qquad \underline{-15x+30} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$x^3-x^2-17x+30=(x-2)(x^2+x-15)$.

Уравнение можно представить в виде: $\dfrac{(x-2)(x^2+x-15)}{x-2}=2x-3$. При $x\neq 2$ это уравнение равносильно уравнению $x^2+x-15=2x-3 \Leftrightarrow x^2-x-12=0$.

Корни последнего уравнения: $x_1=4$, $x_2=-3$. $S=4-3=1$.

<u>Ответ:</u> 1.

3.3. Рациональные неравенства

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены на некотором множестве A. Поставим задачу: найти множество X, на котором значения одной из функций больше (меньше) значений другой из них, другими словами, найти все значения x, для которых выполняется неравенство: $f(x)>\varphi(x)$ ($f(x)<\varphi(x)$).

При такой постановке каждое из этих неравенств называется алгебраическим неравенством с неизвестным x.

Как при решении уравнения, так и при решении неравенства требуется найти все те значения неизвестной величины, для каждого из которых указанное соотношение оказывается верным. Поэтому естественно и для неравенств ввести понятия, аналогичные тем, которые были введены для уравнений.

Множество A называется множеством (областью) допустимых значений неизвестного для данного неравенства.

Множество X называется множеством решений данного неравенства.

Решить неравенство – значит найти множество всех x, для которых данное неравенство выполняется.

Два неравенства называются равносильными, если множества решений их совпадают, т.е. если всякое решение каждого из них является решением другого.

Значение неизвестного называется допустимым для неравенства, если при этом значении обе части неравенства имеют смысл. Совокупность всех допустимых значений неизвестного называется областью определения неравенства.

Основные теоремы преобразования неравенства в равносильное ему:

- Какое-нибудь слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком;
- Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то отличное от нуля положительное число; если это число отрицательное, то знак неравенства меняется на противоположный;
- Если неравенство имеет вид $f(x)\cdot g(x) > \varphi(x)\cdot g(x)$ или $f(x)\cdot g(x) < \varphi(x)\cdot g(x)$, то деление обеих его частей на $g(x)$, как правило, недопустимо, поскольку может привести к потере решений.

Между решениями неравенств и уравнений много общего. Отличие же состоит в том, что решением неравенств чаще всего являются бесконечные множества.

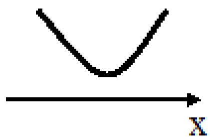
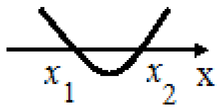
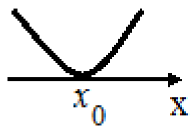
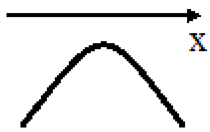
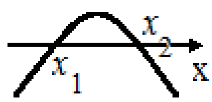
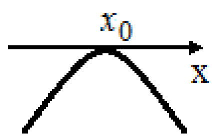
Значит, сделать полную проверку ответа, как это делается для уравнений, нельзя. Поэтому очень важно при решении неравенств переходить только к равносильным неравенствам.

К равносильным неравенствам приводят тождественные преобразования, не изменяющие область допустимых значений.

Свойства числовых неравенств приведены в пункте 2.1.

Решение неравенств, содержащих квадратный трехчлен:

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Пусть $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ - дискриминант квадратного трехчлена.

Вид неравенства	$D<0$	$D>0$	$D=0$
$a>0$			
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0$	$x \in (-\infty; \infty)$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty)$	$x \in (-\infty; \infty)$
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$	$x \in (-\infty; \infty)$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$	$x \in$ $(-\infty; x_0) \cup (x_0; \infty)$
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0$	решений нет	$x \in (x_1; x_2)$	решений нет
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \leq 0$	решений нет	$x \in [x_1; x_2]$	$x_0 = -\dfrac{b}{2 \cdot a}$
$a<0$			
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0$	Решений нет	$x \in [x_1; x_2]$	$x_0 = -\dfrac{b}{2 \cdot a}$
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$	Решений нет	$x \in (x_1; x_2)$	Решений нет
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0$	$x \in (-\infty; \infty)$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$	$x \in$ $(-\infty; x_0) \cup (x_0; \infty)$

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \le 0$	$x \in (-\infty; \infty)$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty)$	$x \in (-\infty; \infty)$

Решение целых рациональных неравенств

если в неравенстве $f(x) < \varphi(x)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданы целыми рациональными выражениями, то его называют целым рациональным неравенством.

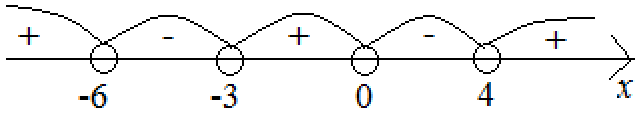
Если неравенство $f(x) < \varphi(x)$ привести к равносильному $f(x) - \varphi(x) < 0$ и разложить левую часть на линейные множители, то такое неравенство можно решить методом интервалов.

Суть этого метода интервалов в следующем:

- Определить область значения переменной (ОДЗ);
- Перенести все в левую часть и решить уравнение, приравняв выражение в левой части к нулю. Разложить на множители, скобки сокращать нельзя;
- Найденные корни уравнения нанести на числовую ось. Если корни входят в ОДЗ, они рисуются закрашенными, если не входят, то выбиты. Эти корни разбивают числовую ось на промежутки, на каждом из которых выражение, стоящее в левой части, сохраняет знак;
- Выбрать в каждом из промежутков какое-нибудь значение («пробную» точку) и определить знак выражения в этой точке;
- Выбрать промежутки, в которых выражение имеет требуемый знак и записать ответ, взяв их объединения.
- Если неравенство нестрогое нужно учесть корни, входящие в ОДЗ и приводящие уравнение к нулю.
-

Пример 6. Решить неравенство: $(x+6)\cdot(x+3)\cdot x\cdot(x-4) > 0$.

Решение. Уравнение $(x+6)\cdot(x+3)\cdot x\cdot(x-4) = 0$ имеет четыре корня $\{-6\}$; $\{-3\}$; $\{0\}$ и $\{4\}$. Эти числа разбивают числовую ось на пять промежутков:



Выбрав в каждом промежутке контрольную точку, определим знак функции, стоящей слева нашего неравенства. Неравенство выполняется в промежутках: $(-\infty;-6)\cup(-3;0)\cup(4;\infty)$.

Решение дробно-рациональных неравенств

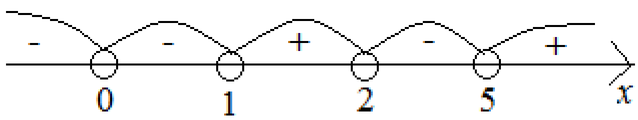
дробно рациональные неравенства $\dfrac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$ можно привести к равносильному неравенству $\begin{cases} P(x)\cdot Q(x)\geq 0 \\ P_m(x)=0, \\ Q_n(x)\neq 0 \end{cases}$ тогда метод интервалов применим и для решения дробно-рациональных неравенств.

Пример 7. решить неравенство: $\dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{x^3-5x^2}<0$.

<u>Решение.</u> разлагая числитель и знаменатель на множители, перепишем данное неравенство в виде: $\dfrac{x^2(x-1)\cdot(x-2)}{x^2(x-5)}<0$, $x=0$ не входит в одз, поэтому равносильное последнему неравенству будет следующее:

$\dfrac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x-5)}<0$ при $x\neq 0$.

С помощью «пробных» точек найдем знак выражения в каждом промежутке, которые были получены, когда мы нанести на числовую ось число 0, так как оно не входит в ОДЗ, и числа 1, 2 и 5, при которых числитель и знаменатель обращаются в нуль.



Выпишем интервалы, где выполняется неравенство.

Ответ: $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(2;5)$.

4. ВЕКТОРЫ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

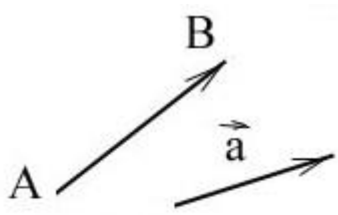


Рис. 4.1

Геометрический вектор представлен в двумерном и трёхмерном пространстве в виде *направленного отрезка*, т.е. отрезка, у которого различают начало и конец.

Если A - начало вектора, а B - его конец, то вектор обозначается символом или одной строчной буквой $\vec{a}$. В литературе часто вектор обозначается жирным шрифтом **AB** или ***a***. На рисунке конец вектора указывается стрелкой (Рис. 4.1).

Физическими примерами векторных величин могут служить перемещение материальной точки, двигающейся в пространстве, скорость и ускорение этой точки, а также действующая на неё сила.

Длиной (или **модулем**) геометрического вектора называется длина порождающего его отрезка и обозначается $|\vec{AB}|$.

Коллинеарные, равные, компланарные векторы.

<u>Определение</u>. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых называются <u>коллинеарными</u>.

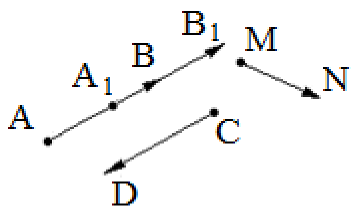


Рис. 4.2

Обозначают: $\vec{AB} \parallel \vec{A_1B_1}$, $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$,

$\vec{AB}$ не $\parallel$ $\vec{MN}$ (Рис. 4.2)

<u>Определение</u>. Векторы называются <u>равными,</u> если они:

1) Коллинеарны;
2) Имеют равные модули;
3) Одинаково направлены.

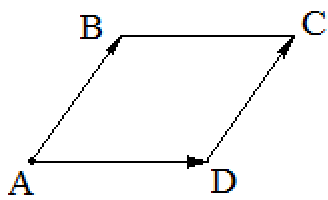


Рис. 4.3

Пишут: $\vec{AB} = \vec{CD}$, но $\vec{AB} \neq \vec{AC}$ (Рис. 4.3)

В физике часто рассматриваются **закреплённые векторы**, заданные точкой приложения, длиной и направлением. Если точка приложения вектора не имеет значения, то его можно переносить, сохраняя длину и направление в любую точку пространства. В этом случае вектор называется **свободным**. Будем рассматривать только **свободные векторы**.

Определение: Три вектора называются компланарными, если они лежат в некоторой одной плоскости или параллельны какой-то одной плоскости (Рис. 4.4).

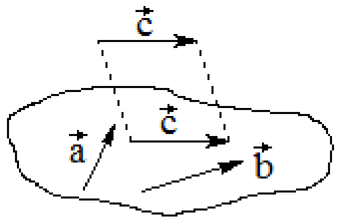


Рис.4.4

Примером некомпланарной тройки векторов могут служить направленные рёбра куба, исходящие из одной вершины.

Линейные операции над векторами.

Над векторами производят различные действия (операции). Умножение вектора на скаляр (число) и сложение векторов называют линейными операциями.

1. Умножение вектора на число.

Определение: Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр λ называется вектор $\vec{b}$, который:

1) имеет модуль $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;
2) коллинеарен вектору $\vec{a}$;
3) направлен так же как вектор $\vec{a}$ при $\lambda>0$ и противоположено вектору $\vec{a}$ при $\lambda<0$.

Обозначается произведение $\vec{b}=\lambda\,\vec{a}$. В частности, при $\lambda=-1$ имеем $(-1)\cdot\vec{a}$. Вектор $-\vec{a}$ называется противоположенным вектору $\vec{a}$ (Рис. 4.5).

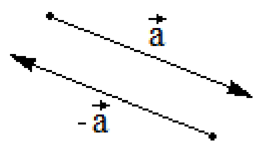


Рис. 4.5

Если $\vec{a}=0$ или $\lambda=0$, то $\lambda\cdot\vec{a}=0$ – нулевой вектор. Ему не приписывается никакого определенного направления, начало и конец совпадают.

Геометрический смысл операции умножения вектора $\vec{a}$ на число λ состоит в "растяжении" вектора $\vec{a}$ в λ раз, (если $|\lambda|>1$, то это действительно растяжение, а при $|\lambda|<1$, – это сжатие) с возможным изменением направления.

Если $|\vec{e}|=1$, то вектор $\vec{e}$ называется единичным вектором (ортом). Вектор $\vec{a}=\vec{a}^{\circ}\cdot|\vec{a}|$, если $\vec{a}^{\circ}$ единичный вектор (орт) вектора $\vec{a}$.

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то один из них линейно выражается через другой: $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ (или $\vec{b}=\lambda\vec{a}$). Очевидно $\lambda=\pm|\vec{a}|/|\vec{b}|$.

"+" если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены одинаково;

"–" если противоположено.

2. Сложение векторов.

Определение: Суммой векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ называется вектор $\vec{R}$, замыкающий ломаную линию, построенную из них параллельным переносом, когда конец предыдущего вектора является началом следующего, причем начало его в начале вектора $\vec{a}_1$, конец в конце вектора $\vec{a}_n$. Обозначают: $\vec{R}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n$

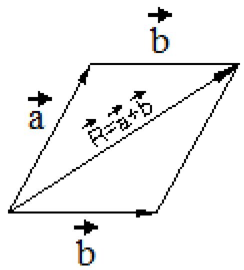


Рис. 4.6

Из этого общего правила легко следует удобное правило параллелограмма для нахождения суммы двух векторов: сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведённых к одному началу O, есть вектор–диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах (Рис. 4.6)

Из рисунка 4.6 видно, что вектор–диагональ $\vec{R}=\vec{a}+\vec{b}$ является замыканием ломаной из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, что согласуется с общим правилом сложения.

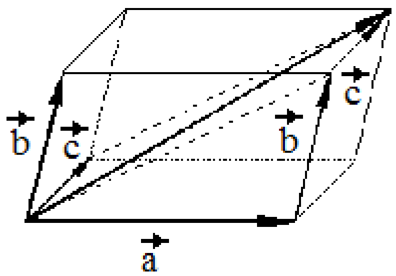


Рис. 4.7

Из общего же правила следует и правило параллелепипеда нахождения суммы трех векторов, приведенных в одно начало O (и не компланарных): это есть вектор–диагональ параллелепипеда, построенного на данных векторах, как на сторонах (Рис. 4.7).

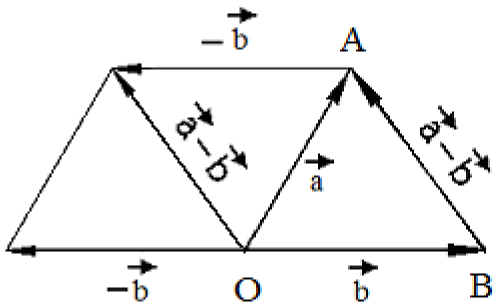


Рис. 4.8

Операция вычитания векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначается $\vec{a}-\vec{b}$) понимается как сложение вектора $\vec{a}$ с вектором $-\vec{b}$, противоположенным вектору $\vec{b}$.

На практике по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведённым в одно начало О, сразу строят вектор $\vec{BA}=\vec{a}-\vec{b}$, как идущий из конца вычитаемого вектора $\vec{b}$ в конец уменьшаемого вектора $\vec{a}$. (Рис. 4.8)

3. Свойства линейных операций.

Отметим восемь основных свойств линейных операций над векторами:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность сложения или переместительность)

2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (ассоциативность сложения или сочетательность)

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (существование нулевого вектора)

4) Для любого вектора $\vec{a}$ существует ему противоположенный вектор $-\vec{a}$, так что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

5) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ (существование вектора равного данному)

6) $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$, (ассоциативность умножения на скаляр)

7) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$; (распределительные свойства относи-

8) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. тельно умножения на скаляр)

Пространство, в котором определены данные линейные операции над векторами, называют линейным.

Пример 1. Упростить выражение: $2\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)+3\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)+4\vec{a}$.

Решение: $2\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)+3\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)+4\vec{a}=6\vec{a}-8\vec{b}+3\vec{b}-6\vec{a}+4\vec{a}=4\vec{a}-5\vec{b}$.

Пример 2. Векторы $\vec{AC}=\vec{a}$ и $\vec{BD}=\vec{b}$ служат диагоналями параллелограмма ABCD (рис. 4.9). Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ и $\vec{DA}$, являющиеся сторонами этого параллелограмма.

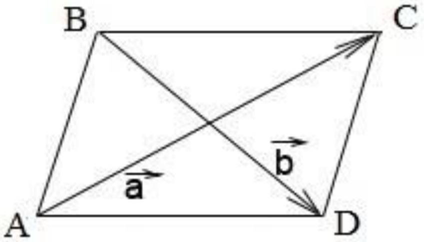


Рис. 4.9

Решение. Точка пересечения диагоналей параллелограмма делит каждую диагональ пополам. Длины искомых векторов находим либо как половины сумм векторов, образующих с искомыми треугольник, либо как половины разностей (в зависимости от направления вектора, служащего диагональю), либо, как в последнем случае, половины суммы, взятой со знаком минус. Итак, искомые векторы равны:

$$\vec{AB}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2},\ \vec{BC}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \vec{CD}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2},\ \vec{DA}=\frac{-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}{2}.$$

Проекция вектора

Проекцией вектора $\overline{M_1M_2}$ на заданную ось $\vec{l}$ называется численное значение вектора $\overline{N_1N_2}$ на оси $\vec{l}$ (Рис. 4.10а). Проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется проекция вектора $\vec{a}$ на ось, имеющую с вектором $\vec{b}$ одинаковое направление (Рис. 4.10б).

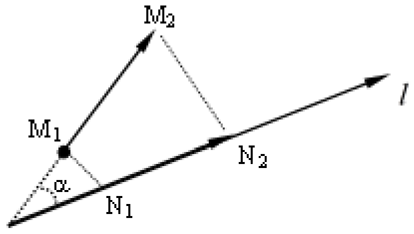


Рис. 4.10а

$np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\alpha$, где α- угол между вектором $\vec{a}$ и осью $\vec{l}$.

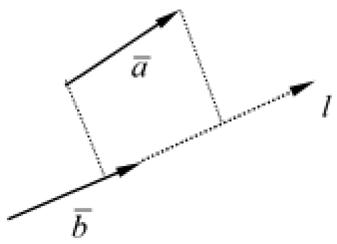


Рис. 4.10б

Свойство проекций:

1) Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций этих векторов, т.е.

$$\text{Пр}_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\text{Пр}_l\vec{a}+\text{Пр}_l\vec{b};$$

3) проекция произведения вектора $\vec{a}$ на число λ равна произведению числа на проекцию вектора $\vec{a}$, т.е. $\text{Пр}_l\ \lambda\cdot\vec{a}=\lambda\,\text{Пр}_l\vec{a}$.

Разложение вектора по базису.

Пусть заданы векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ и числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$. Составим комбинацию из этих векторов, используя только введенные линейные комбинации сложения и умножения вектора на число. В самом общем случае она имеет вид: $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n$. Такие комбинации называются линейными комбинациями векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$, а числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ коэффициентами линейной комбинации.

Если вектор представлен как линейная комбинация некоторых векторов, то говорят, что он разложен по этим векторам.

Теорема 1. Пусть дан ненулевой вектор $\vec{a}$. Любой коллинеарный ему вектор $\vec{b}$ представлен в виде $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ единственным образом.

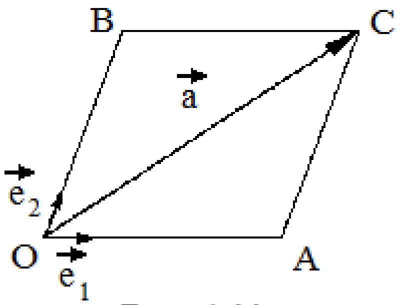


Рис. 4.11

Теорема 2. Любой вектор $\vec{a}$ на плоскости может быть разложен по двум неколлинеарным векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ единственным образом.

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2.$$

Неколлинеарные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, взятые в определенном порядке, называются базисом на плоскости, а коэффициенты линейной комбинации координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

Теорема 3. Если $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ три некомпланарные вектора, то всякий четвертый вектор $\vec{a}$ раскладывается по ним и это разложение единственно.

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3.$$

Определение: Любые два неколлинеарных упорядоченных (взятых в определенном порядке) вектора на плоскости называются базисом на этой плоскости. Любые три некомпланарные упорядоченные вектора в пространстве называются базисом в пространстве.

Таким образом, в пространстве с выбранным базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ нам удалось каждому вектору поставить в соответствие тройку чисел - его координат. Теперь при выполнении введенных операций над векторами можно заменить геометрические построения аналитическими выражениями.

Пусть $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3, \vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3,$

тогда $\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e}_3$

и $\lambda\vec{a} = (\lambda\alpha_1)\vec{e}_1 + (\lambda\alpha_2)\vec{e}_2 + (\lambda\alpha_3)\vec{e}_3.$

Таким образом, при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, а при сложении векторов складываются их соответствующие координаты, если они определены относительно одного и того же базиса.

Декартовы прямоугольные координаты

Определение: декартовой системой координат называются совокупность точки и базиса. Точка *O* - начало координат, *Ox*,*Oy*,*Oz* - координатные оси, *Oxy*,*Oyz*, *Oxz* -координатные плоскости.

Ось *Ox* называют осью *абсцисс*, ось *Oy* - осью *ординат* и ось *Oz* - осью *аппликат*.

Часто используется в декартовой системе координат, базисные векторы которой взаимно перпендикулярны и имеют единичные длины:

$$\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}, \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Разложим произвольный вектор $\vec{a}$ трехмерного пространства по ортам. Для этого построим вектор $O\vec{M}$, равный вектору $\vec{a}$ (Рис.4.12). Тогда $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, иначе вектор $\vec{a}$ можно записать в виде: $\vec{a} = (x, y, z)$.

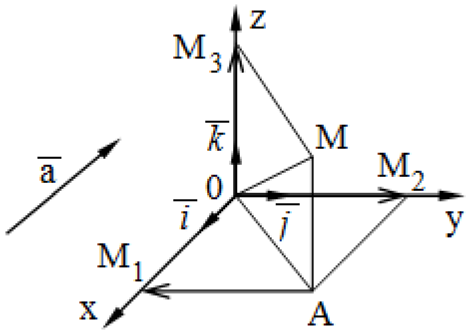


Рис.4.12

Из единственности разложения вектора $\vec{a}$ по ортам, следует, что если координаты любых двух векторов $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ равны, т.е. $x_a = x_b$, $y_a = y_b$, $z_a = z_b$, то эти векторы тоже равны.

Вектор $O\vec{M}$, идущий от начала точки *O* к точке $M(x, y, z)$ называется *радиус - вектором* этой точки, и его координаты $O\vec{M}(x, y, z)$ совпадают с соответствующими координатами точки *M*.

Пусть $A\vec{B}$ - вектор, координаты начала и конца которого известны $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда координаты вектора $A\vec{B}$ выражаются по формулам: $X = x_2 - x_1, Y = y_2 - y_1, Z = z_2 - z_1$.

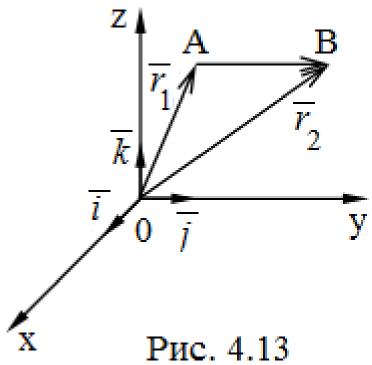


Рис. 4.13

Из рис. 4.13 видно, что $\vec{AB} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$.

Используя свойства проекций, имеем: $X = Пр_{ox}\vec{AB} = Пр_{ox}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = x_2 - x_1$, и аналогичным образом находим $Y = y_2 - y_1, Z = z_2 - z_1$.

Разложение вектора $\vec{AB}$ по ортам будет иметь следующий вид:

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} .$$

Перемножение векторов и свойства независимости векторов подробно рассматриваются в курсе высшей математики.

5. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

5.1. Определение и свойства показательной функции. График показательной функции.

Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют *показательной функцией*.

Основные свойства показательной функции $y = a^x$:

Свойство	$a > 1$	$0 < a < 1$
Область определения	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений	$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
Монотонность	Возрастает	Убывает
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная

График показательной функции

Графиком показательной функции является *экспонента*:

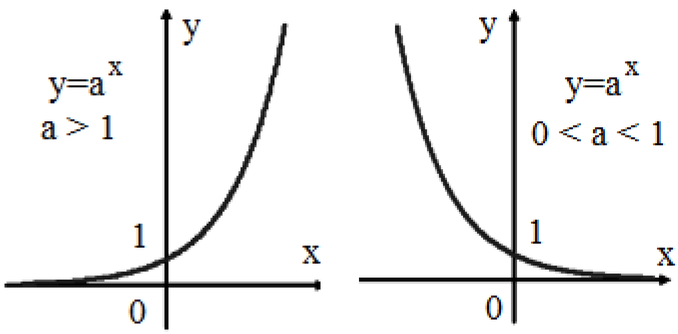


Рис. 5.1. Графики показательных функций (экспоненты)

5.2. Различные способы решения показательных уравнений и неравенств.

Показательными называются уравнения и неравенства, в которых неизвестная переменная находится только в показателях каких-либо степеней.

Решение показательных уравнений

Теорема 1. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Основные формулы и действия со степенями:

$a > 0$, $b > 0$:

$a^0 = 1$, $1^x = 1$; $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}\ (k \in Z, n \in N)$; $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$; $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$; $a^x \cdot b^x = (ab)^x$; $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

Основные методы решения показательных уравнений

1. Метод приведения степеней к одинаковому основанию.
2. Вынесение общего множителя за скобки.
3. Метод введения новой переменной.
4. Метод почленного деления.
5. Графический метод.

I. Уравнения вида $a^{\varphi(x)}=1$. (Метод приведения степеней к одинаковому основанию).

Пример 1. Решить уравнение $2^{x^2-5x+6}=1$.

<u>Решение.</u> $2^{x^2-5x+6}=2^0$ - по определению степени с нулевым показателем.

По теореме 1, получим квадратное уравнение: $x^2-5x+6=0$.

Его решениями являются $x_1=2$; $x_2=3$.

<u>Ответ:</u> $x_1=2$; $x_2=3$.

II. Уравнения вида $a^{\varphi(x)}=a^{\alpha}$. (Метод приведения степеней к одинаковому основанию).

Пример 2. Решить уравнение $5^{x^2-\frac{5}{7}x} = \sqrt[7]{25}$.

<u>Решение.</u> По свойству степеней получим $5^{x^2-\frac{5}{7}x} = 5^{\frac{2}{7}}$,

тогда по теореме 1, получим квадратное уравнение: $x^2 - 5/7x - 2/7=0$.

Его решениями являются $x_{1=} - 2/7$, $x_2=1$.

<u>Ответ:</u> $x_{1=} - 2/7$, $x_2=1$.

III. Уравнения вида $A_0a^{mx+k_0} + A_1a^{mx+k_1} + A_2a^{mx+k_2} + \ldots + A_na^{mx+k_n} = M$. (Вынесение общего множителя за скобки).

Приведём общий алгоритм метода вынесения общего множителя за скобки на примере уравнения $A_0a^{mx+k_0} + A_1a^{mx+k_1} + A_2a^{mx+k_2} + \ldots + A_na^{mx+k_n} = M$:

1. вынесем общий множитель за скобки: $a^{mx}(A_0a^{k_0} + A_1a^{k_1} + A_2a^{k_2} + \ldots + A_na^{k_n}) = M$;
2. обозначим выражение в скобках $A_0a^{k_0} + A_1a^{k_1} + A_2a^{k_2} + \ldots + A_na^{k_n} = N$;
3. подставим замену в изначальное уравнение $a^{mx} N = M$;
4. получим простейшее показательное уравнение $a^{mx} = M/N$;
5. находим решение этого уравнения при условии, что если $M/N \leq 0$, то уравнение решений не имеет.

Пример 3. Решить уравнение $5^{3x} - 2 \cdot 5^{3x-1} - 3 \cdot 5^{3x-2} = 300$.

Решение. Вынесем 5^{3x} за скобку и получим уравнение $5^{3x}\left(1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{25}\right) = 300$.

Выражение в скобках равно числу: $5^{3x} \cdot \frac{12}{25} = 300$, тогда уравнение предыдущего вида $5^{3x}=625$. Приведем к одинаковому основанию $5^{3x}=5^4$. По теореме 1, получим $3x=4$, следовательно, $x=4/3$.

Ответ: $x=4/3$.

IV. Уравнения вида $A_0a^{2x} + A_1a^x + A_2 = 0$. (Метод введения новой переменной).

Приведём общий алгоритм метода введения новой переменной на примере уравнения $A_0a^{2x} + A_1a^x + A_2 = 0$.

Если в показательном уравнении все основания одинаковы, а показатели степеней – разные, то:

1. приведите к одному показателю степени и получите уравнение с одинаковыми основаниями и одинаковыми показателями степеней, например $A_0 (a^x)^2 + A_1a^x + A_2 = 0$;
2. сделайте замену переменной, например $a^x = y$;
3. решите уравнение относительно этой новой переменной ($A_0 y^2 + A_1y + A_2 = 0$);

4. сделайте обратную замену переменной и получите совокупность простейших показательных уравнений.

Пример 4. Решить уравнение $2^{4x}-50\cdot 2^{2x}=896$.

<u>Решение.</u> Сделаем замену: $2^{2x}=y$,

тогда получим квадратное уравнение: y^2-50y-896=0,

его решениями являются y_1=64, y_2= -14.

Сделаем обратную замену 2^{2x}=64, следовательно, $2^{2x}=2^6$.

Тогда 2x=6, x=3.

А для второго корня 2^{2x}= -14 – решений нет.

<u>Ответ:</u> x=3.

V. Уравнения вида $A_0a^x + A_1a^{x/2}b^{x/2} + A_2b^x$ =0. (Метод почленного деления).

Однородные уравнения второй степени в общем виде можно записать так:

$$A_0a^{2f(x)} + A_1a^{f(x)}b^{f(x)} + A_2b^{2f(x)} = 0$$

где A_0, A_1, A_2, a и b — некоторые числа, причём a и b — положительны и отличны от единицы.

Чтобы прийти к такому виду, почти всегда уравнение требуется предварительно преобразовать. Чаще всего уравнение записывают в виде

$$A_0a^{2f(x)} + A_1(a\cdot b)^{f(x)} + A_2b^{2f(x)} = 0$$

Запишем признаки, которые позволят отличить однородное уравнение от уравнений другого вида.

<u>Признаки однородного показательного уравнения второй степени</u>

- уравнение содержит ровно три степени с разными основаниями;
- показатели двух степеней ровно в два раза больше показателя третьей степени;
- основание этой третьей степени равно произведению оснований двух других степеней.

Приведём общий алгоритм метода почленного деления на примере уравнения $A_0a^x + A_1a^{x/2}\,b^{x/2} + A_2b^x$ =0.

Если в показательном уравнении встречаются два разных основания степеней с разными показателями, то:

1. приведите к одинаковым показателям степеней и получите уравнение с двумя разными основаниями и одинаковыми (или кратными) показателями степеней;
2. разделите все уравнение почленно на меньшее основание в степени уравнения (например на $b^x \neq 0$). Преобразуйте дроби с помощью тождества степени дроби и получите показательное уравнение с одинаковыми основаниями и одинаковыми показателями степеней ($A_0(a/b)^x + A_1(a/b)^{x/2} + A_2 = 0$);
3. сделайте замену переменной ($(a/b)^{x/2} = y$);
4. решите уравнение относительно этой новой переменной ($A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0$);
5. сделайте обратную замену переменной и получите совокупность простейших показательных уравнений.

Пример 5. Решить уравнение $2^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0$.

Решение. По свойствам степеней: $2\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^x \cdot 3^x + 3\cdot 3^{2x} = 0$.

Разделим данное уравнение на 3^{2x}, получим $2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0$.

Сделаем замену $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, и уравнение превращается в квадратное $2\cdot y^2 - 5\cdot y + 3 = 0$, корнями которого являются $y_1=1$, $y_2=3/2$.

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$, следовательно, $x=0$.

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$, следовательно, $x=-1$.

Ответ: $x=0$, $x=-1$.

VI. Уравнения вида $a^{\varphi(x)}=f(x)$. (Графический способ).

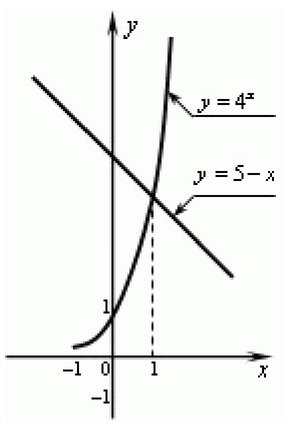


Рис. 5.2

Пример 6. Решить уравнение $4^x = 5 - x$.

Решение. Решением уравнения является абсцисса точки пересечения графиков функций $y=4^x$ и $y=5-x$ (см. рис. 5.2).

Проверка: $4^1=5-1$, следовательно, 4=4 (верно).

Ответ: 1.

Решение показательных неравенств.

Определение: Пусть a - данное положительное, не равное единице число и b - данное действительное число. Тогда неравенства $a^x > b \left(a^x \geq b\right)$ и $a^x < b \left(a^x \leq b\right)$ называются *простейшими показательными неравенствами*.

Решением неравенства с неизвестным x называют число x_0, при подстановке которого в неравенство получается верное числовое неравенство. Решить неравенство - значит, найти все его решения или показать, что их нет.

Теорема 2. Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$. Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Методы решения показательных неравенств.

1. Показательные неравенства, сводящиеся к простейшим.

Пример 7. Решить неравенство $2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 4$.

Решение. $2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 4$, $2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 2^2$, так как $\left(a=2>1\right)$ функция возрастает на всей области определения и по теореме 2, получим $\dfrac{x+1}{x-2} \geq 2$. Принесём всё в одну сторону $\dfrac{x+1}{x-2} - 2 \geq 0$, приведем к общему знаменателю $\dfrac{x-5}{x-2} \leq 0$. По правилу интервалов получим $2 < x \leq 5$.

Ответ: $(2;5]$.

Пример 8. Решить неравенство $-4 \leq 3^{x^2-2x-1} - 5 \leq 4$.

Решение: $-4 \leq 3^{x^2-2x-1} - 5 \leq 4$,

$1 \le 3^{x^2-2x-1} \le 9,$

$\begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \ge 1, \\ 3^{x^2-2x-1} \le 9; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \ge 3^0, \\ 3^{x^2-2x-1} \le 3^2; \end{cases}$ $y = 3^t\left(3 > 1\right)$ возрастает на всей области определения

$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 \ge 0, \\ x^2 - 2x - 1 \le 2; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le x \le 3, \\ \left[\begin{array}{l} x \le 1 - \sqrt{2}, \\ x \ge 1 + \sqrt{2}; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 \le x \le 3, \\ x \le 1 - \sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x \le 3, \\ x \ge 1 + \sqrt{2}; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} -1 \le x \le 1 - \sqrt{2}, \\ 1 + \sqrt{2} \le x \le 3. \end{array}\right.$

Ответ: $\left[-1;1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2};3\right].$

2. Метод введения новой переменной.

Пример 9. Решить неравенство $2^{2x} + 2 > 3 \cdot 2^x$.

Решение. $2^{2x} + 2 > 3 \cdot 2^x$, перенесем все в левую часть $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$.

Пусть $2^x = t, t > 0$ тогда $\begin{cases} t^2 - 3t + 2 > 0, \\ t > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t < 1, \\ t > 2, \end{array}\right. \\ t > 0; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t > 0, \\ t < 1, \end{cases} \\ \begin{cases} t > 0, \\ t > 2; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 0 < t < 1, \\ t > 2. \end{array}\right.$

Вернёмся к переменной $x : \begin{cases} 0 < 2^x < 1, \\ 2^x > 2. \end{cases}$ Так как $2^x > 0$ при $x \in R$, то система приобретает вид: $\begin{cases} 2^x < 1, \\ 2^x > 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x < 2^0 \\ 2^x > 2 \end{cases}$. Функция $y = 2^t\left(2 > 1\right)$ возрастает при всех *x* из области определения $\begin{cases} x < 0, \\ x > 1. \end{cases}$

Ответ: $\left(-\infty;0\right) \cup \left(1;\infty\right).$

3. Метод вынесения общего множителя за скобки.

Пример 10. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > 5$.

Решение: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}>5$, вынесем общий множитель за скобки:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+1\right)>5$. В скобках получим число $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\frac{5}{4}>5$, $\Rightarrow$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}>4$, $(2)^{2-x}>2^{2}$, $y=2^{t}(2>1)$ возрастает на всей области определения

$2-x>2$, $x<0$.

Ответ: $(-\infty;0)$.

Пример 11. Решить неравенство $3^{x+2}+7^{x}<4\cdot7^{x-1}+34\cdot3^{x-1}$.

Решение: $3^{x+2}+7^{x}<4\cdot7^{x-1}+34\cdot3^{x-1}$, перенесем слагаемые, содержащие разные основания в противоположные стороны $3^{x+2}-34\cdot3^{x-1}<4\cdot7^{x-1}-7^{x}$. Вынесем общие множители с каждой из сторон $3^{x-1}\left(3^{3}-34\right)<7^{x-1}(4-7)$, в скобках выражения представляют собой числа $3^{x-1}(-7)<7^{x-1}(-3)$. Перенесем тройку и семерку в соответствующие стороны, запишем выражение, учитывая свойства степеней, знак неравенства поменяется, так как разделим его на минус единицу $3^{x-2}>7^{x-2}$. Разделим неравенство на $7^{x-2}>0$, при $x\in\mathrm{R}$, тогда знак не меняется. $\left(\frac{3}{7}\right)^{x-2}>1\Rightarrow\left(\frac{3}{7}\right)^{x-2}>\left(\frac{3}{7}\right)^{0}$, $y=\left(\frac{3}{7}\right)^{t}\left(0<\frac{3}{7}<1\right)$, следовательно, убывает на всей области определения, тогда по теореме 2: $x-2<0$, $x<2$.

Ответ: $(-\infty;2)$.

4. **Метод почленного деления.**

Пример 12. Решить неравенство $3\cdot4^{x}+2\cdot9^{x}-5\cdot6^{x}<0$.

Решение. $3\cdot4^{x}+2\cdot9^{x}-5\cdot6^{x}<0$, это однородное неравенство второго порядка $3\cdot2^{2x}-5\cdot(2\cdot3)^{x}+2\cdot3^{2x}<0\ \Rightarrow\ 3\cdot2^{2x}-5\cdot2^{x}\cdot3^{x}+2\cdot3^{2x}<0$. Так как $3^{2x}>0$, при $x\in\mathrm{R}$, то разделим неравенство на 3^{2x}, при этом знак не изменится $3\frac{2^{2x}}{3^{2x}}-5\frac{2^{x}3^{x}}{3^{2x}}+2\frac{3^{2x}}{3^{2x}}<0\ \Rightarrow\ 3\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+2>0$.

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t, t > 0$ тогда $\begin{cases} 3t^2 - 5t + 2 > 0, \\ t > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2}{3} < t < 1, \\ t > 0; \end{cases}$ $\frac{2}{3} < t < 1.$

Вернёмся к переменной x: $\frac{2}{3} < \left(\frac{2}{3}\right)^x < 1, \Rightarrow \frac{2}{3} < \left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^0$, так как

$y = \left(\frac{2}{3}\right)^r \left(0 < \frac{2}{3} < 1\right)$ убывает на всей области определения , то $0 < x < 1$.

Ответ: $(0;1)$.

5. Метод рационализации.

Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при которой неравенство $G(x) \vee 0$ равносильно неравенству $F(x) \vee 0$ в области определения выражения $F(x)$. Под знаком $\vee$ подразумевается один из знаков $>, <, \geq, \leq$.

Любое неравенство приводимо к виду $\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_k} \vee 0$,

где $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_k$ — некоторые функции. Довольно часто каждую из них можно заменить на другую знакосовпадающую функцию на области определения. Приведём основные типы выражений, для которых можно использовать метод рационализации.

В первом столбце таблицы — функция $F(x)$, которую мы рационализируем. Во втором столбце — функция $G(x)$ — знакосовпадающая с функцией $F(x)$ на области её определения. При этом, используя метод рационализации, нельзя забывать про область определения функций. При решении задачи исходное неравенство преобразуется в систему: рационализированное неравенство и ОДЗ исходного неравенства.

Выражение F	**Выражение** G	**ОДЗ**
$h(x)^{f(x)} - h(x)^{g(x)}$	$(h(x)-1)\cdot(f(x)-g(x))$	$h(x)>0$

$h(x)^{f(x)}-1$	$(h(x)-1)\cdot f(x)$	$h(x)>0$
$f(x)^{h(x)}-g(x)^{h(x)}$	$(f(x)-g(x))\cdot h(x)$	$f(x)>0, g(x)>0$

Теорема 3. Показательное неравенство $a(x)^{f(x)} \ge a(x)^{g(x)}$ равносильно следующей системе неравенств: $\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \ne 1, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \ge 0. \end{cases}$

Пример 13. Решить неравенство $(x^2-x-2)^{(2x^2-x-1)} \ge (x^2-x-2)^{(9-x^2)}$.

Решение. Составим систему неравенств, аналогичную системе из теоремы 3:

$$\begin{cases} x^2-x-2>0, \\ x^2-x-2 \ne 1, \\ ((x^2-x-2)-1)((2x^2-x-1)-(9-x^2)) \ge 0. \end{cases}$$

Решив два первых неравенства, найдем ОДЗ исходного показательного неравенства:

$$\begin{cases} x<-1 \; или \; x>2, \\ x \ne \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

Откуда ОДЗ: $x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{1-\sqrt{13}}{2}, -1) \cup (2, \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$.

Далее рассмотрим основное неравенство

$((x^2-x-2)-1)((2x^2-x-1)-(9-x^2)) \ge 0$, которое упрощается к виду:

$(x^2-x-3)(3x^2-x-10) \ge 0$.

Корни первого множителя этого неравенства мы нашли ранее: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Корни второго множителя равны: $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{6}$, $x_3 = -\frac{5}{3}$, $x_4 = 2$. Упорядочим корни. Так как $3 < \sqrt{13} < 4$, то $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$. Применив метод интервалов, получим следующее решение основного неравенства:

$x \in (-\infty, -\frac{5}{3}) \cup (\frac{1-\sqrt{13}}{2}, 2) \cup (\frac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$.

Учитывая найденную ранее ОДЗ, получаем окончательный ответ:

$$x \in (-\infty, -\frac{5}{3}) \cup (\frac{1-\sqrt{13}}{2}, -1) \cup (\frac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty).$$

6. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

6.1. Определение и свойства логарифмической функции. График логарифмической функции. Логарифмическая функция. Логарифмы.

Определение: Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.

Например: $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, так как $3^{-2} = \frac{1}{9}$;
$\log_7 7 = 1$, так как $7^1 = 7$.

Определение логарифма можно записать так: $a^{\log_a b} = b$. Это равенство справедливо при $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$. Его обычно называют **основным логарифмическим тождеством.**

Действие нахождения логарифма числа называют **логарифмированием.**

Действие нахождения числа по его логарифму называют **потенцированием.**

Свойства логарифмов.

При выполнении преобразований выражений, содержащих логарифмы, при вычислениях и при решении уравнений часто используются различные свойства логарифмов. Рассмотрим основные из них.

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, r — любое действительное число. Тогда справедливы формулы:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c, \quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad \log_a b^r = r \log_a b.$$

Десятичные и натуральные логарифмы.

Для логарифмов чисел составлены специальные таблицы (таблицы логарифмов). Логарифмы вычисляют также с помощью микрокалькулятора. И в том и в другом случае находятся только десятичные или натуральные логарифмы.

<u>Определение:</u> Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

<u>Определение:</u> Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию *e*, где *e* — иррациональное число, приближённо равное 2,7. При этом пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$

Иррациональное число *e* играет важную роль в математике и её приложениях. Число *e* можно представить как сумму:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} + \ldots \quad \text{или } e = \sum \frac{1}{n!}.$$

$e \approx 2{,}7182818284$.

Достаточно знать значения только десятичных или только натуральных логарифмов чисел, чтобы находить логарифмы чисел по любому основанию. Для этого используется **формула замены основания логарифма:**

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{или так} \quad \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b,$$

где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$

Следствия из формулы замены основания логарифма.

При $c = 10$ и $c = e$ получаются формулы перехода к десятичным и натуральным логарифмам:

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}, \quad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Логарифмическая функция, её свойства и график

В математике и её приложениях часто встречается **логарифмическая функция** $y = \log_a x$, где a - заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Логарифмическая функция обладает свойствами:

1) Область определения логарифмической функции — множество всех поло-

жительных чисел.

2) Множество значений логарифмической функции — множество всех действительных чисел.

3) Логарифмическая функция не является ограниченной.

4) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является возрастающей на промежутке $(0;+\infty)$, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.

5) Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $x > 1$, отрицательные при $0 < x < 1$. Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $0 < x < 1$, отрицательные при $x > 1$.

Ось Oy является вертикальной асимптотой графика функции $y = \log_a x$

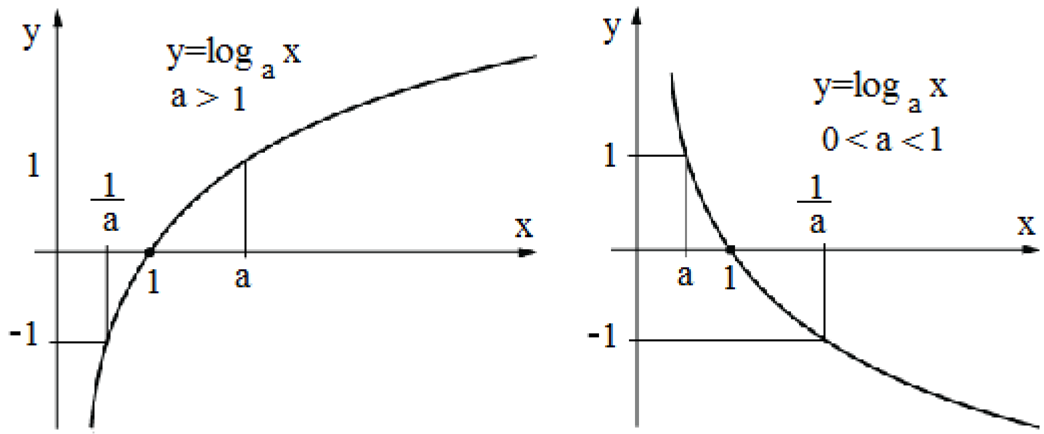


Рис. 6.1

Отметим, что график любой логарифмической функции $y = \log_a x$ проходит через точку (1; 0).

При решении уравнений часто используется следующая теорема:

Теорема. Если $\log_a x_1 = \log_a x_2$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 = x_2$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, взаимно обратны.

6.2. Различные способы решения логарифмических уравнений и неравенств.

Основные методы решения логарифмических уравнений:

- На основании определения логарифма.
- Метод потенцирования.
- Метод постановки.
- Метод логарифмирования.

Основные правила:

1. Нужно найти область допустимых значений (ОДЗ).
2. С помощью основных логарифмических формул привести в уравнении к логарифмам с одинаковым основанием слева и справа от знака равенства.
3. Если пункт 2 невозможен, то вводится подстановка.

1. Решение логарифмических уравнений на основании определения логарифма.

По определению логарифма $\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c$ при этом $f(x) > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Пример 1. Решить уравнение $\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3$.

Решение. ОДЗ: $x > -1$.

По свойству логарифма верно равенство $\log_2((x+1)(x+3)) = 3$.

Из этого равенства по определению логарифма получаем $(x+1)(x+3) = 8$,

$x^2 + 4x + 3 = 8$, т.е. $x^2 + 4x - 5 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.

Так как $x = -5 < -1$, то данное значение не входит в ОДЗ, т.е. $x = -5$ не является корнем этого уравнения.

Ответ: x = 1.

2. Метод потенцирования.

Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их.

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$, где $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Пример 2. Решить уравнение $\lg(2x^2 - 4x + 12) = \lg x + \lg(x+3)$.

Решение. Выражение $2x^2 - 4x + 12$ всегда положительное, тогда ОДЗ $x > 0$. По свойству логарифмов $\lg(2x^2 - 4x + 12) = \lg(x^2 + 3x)$,

откуда $2x^2 - 4x + 12 = x^2 + 3x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$. Корнями квадратного уравнения являются $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Оба корня входят в ОДЗ.

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

3. Метод подстановки.

Пример 3. Решим уравнение $\log_5^2 x + \log_5 x + 1 = \dfrac{7}{\log_{0,2} \dfrac{5}{x}}$.

Решение. ОДЗ $x > 0$. Сначала перейдем к основанию 5:

$\log_{0,2} \dfrac{5}{x} = \dfrac{\log_5 \dfrac{5}{x}}{\log_5 0,2} = -\log_5 \dfrac{5}{x} = \log_5 \dfrac{x}{5} = \log_5 x - 1$, тогда уравнение примет вид $\log_5^2 x + \log_5 x + 1 = \dfrac{7}{\log_5 x - 1}$. Положим $\log_5 x = u$, тогда $u^2 + u + 1 = \dfrac{7}{u - 1}$, перенося все в левую сторону, получим уравнение $u^3 - 8 = 0$. Решая это уравнение, получим $u = 2$, откуда $\log_5 x = 2$ и $x = 25$ – корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 25$.

4. Метод логарифмирования.

Данный метод является “обратным” методу потенцирования, т. е. мы от уравнения без логарифмов переходим к уравнению, их содержащему.

$f(x) = g(x) \Rightarrow \log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$, где $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$, $h(x) \neq 1$.

Этот метод обычно используется, если в уравнении есть показательные функции, логарифмы – в показателе. Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 4. Решить уравнение $x^{1-\log_2 x} = 0,25$.

Решение. Область определения уравнения $x > 0$, в этом случае обе части уравнения положительны, поэтому их можно прологарифмировать по основанию 2, в результате получим уравнение $\log_2 x^{1-\log_2 x} = \log_2 0{,}25$, равносильное данному. Далее по свойствам логарифма имеем $(1-\log_2 x)\log_2 x = -2$. Положим, $\log_2 x = u$, тогда $(1-u)u = -2$, корнями данного уравнения будут $u_1 = -1$ и $u_2 = 2$. Возвращаясь к переменной x, получим $\log_2 x = -1$ и $\log_2 x = 2$ и тогда $x_1 = 0{,}5$ и $x_2 = 4$ являются корнями уравнения.

Ответ: $x_1 = 0{,}5$ и $x_2 = 4$.

Пример 5. Решить уравнение $\log_x (3x^{\log_4 x} + 4) = 2\log_4 x$.

Решение. ОДЗ $x > 0$. Воспользуемся определением логарифма, приведем исходное уравнение к виду $x^{2\log_4 x} = 3x^{\log_4 x} + 4$. Положим $x^{\log_4 x} = u$, тогда получим уравнение $u^2 - 3u - 4 = 0$, корни которого $u_1 = -1$ и $u_2 = 4$. Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений $x^{\log_4 x} = -1$ и $x^{\log_4 x} = 4$. Т.к. $x^{\log_4 x} > 0$, то первое уравнение решения не имеет. Возьмем логарифмы по основанию 4 от обеих частей второго уравнения $\log_4 x^{\log_4 x} = \log_4 4$, т.е. $\log_4^2 x = 1$, тогда $\log_4 x = \pm 1$, откуда $x_1 = 4$, $x_2 = \dfrac{1}{4}$ корни исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = \dfrac{1}{4}$.

Решение логарифмических неравенств.

При решении логарифмических неравенств необходимо учитывать, что

1. если $a > 0$, $a \neq 1$, то $\log_a f(x) \geq b$ <=> $\begin{cases} f(x) \geq a^b \\ a > 1 \end{cases}$, или $\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases}$.

2. если $a > 0$, $a \neq 1$, то $\log_a f(x) \leq b$ <=> $\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq a^b \\ a > 1 \end{cases}$, или $\begin{cases} f(x) \geq a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases}$.

3. $\log_{f(x)} g(x) \geq \log_{f(x)} h(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq h(x) \\ h(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} h(x) \geq g(x) \\ g(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$.

4. $\log_{f(x)} g(x) \leq \log_{f(x)} h(x) \iff \begin{cases} g(x) \leq h(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} h(x) \leq g(x) \\ h(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$.

5. $\log_{\varphi(x)} f(x) > 0 \Rightarrow \log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} 1 \iff \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) > 1 \end{cases}$.

Имеется не менее 4 принципиально различных типов подхода к решению логарифмических неравенств:

1. перебор случаев «основание больше единицы», «основание меньше единицы»;
2. переход к равносильным совокупностям систем неравенств, не содержащих логарифмов, метод рационализации;
3. обобщенный метод интервалов;
4. графический метод.

Рассмотрим примеры решения логарифмических неравенств.

1. Перебор случаев «основание больше единицы», «основание меньше единицы».

Пример 6. Решить неравенство $\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x)$

Решение. Для того чтобы от логарифмического неравенства перейти к рациональному, необходимо знать относительно основания логарифма (x – 2) больше оно 1 или меньше. Поэтому задача сводится к решению совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-2>1 \\ 2x-3>0 \\ 24-6x>0 \\ 2x-3>24-6x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0<x-2<1 \\ 2x-3>0 \\ 24-6x>0 \\ 2x-3<24-6x \end{cases}.$$

Из первой системы получаем $\frac{27}{8} < x < 4$, из второй $2 < x < 3$ и решением данного неравенства является $x \in (2;\, 3) \cup \left(\frac{27}{8}; 4\right)$.

<u>Ответ:</u> $x \in (2;\, 3) \cup \left(\frac{27}{8}; 4\right)$

2. Метод рационализации.

Напомним, в первом столбце таблицы — функция $F(x)$, которую мы рационализируем. Во втором столбце — функция $G(x)$ — знакосовпадающая с функцией $F(x)$ на области её определения. При этом, используя метод рационализации, нельзя забывать про область определения функций.

Выражение F	**Выражение** G	**ОДЗ**
$\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$	$(h(x)-1)\cdot(f(x)-g(x))$	$f(x)>0, g(x)>0, h(x)>0,$ $h(x)\neq 1$
$\log_{h(x)} f(x) - 1$	$(h(x)-1)\cdot(f(x)-h(x))$	$f(x)>0, h(x)>0, h(x)\neq 1$
$\log_{h(x)} f(x)$	$(h(x)-1)\cdot(f(x)-1)$	$f(x)>0, h(x)>0, h(x)\neq 1$
$\log_{f(x)} h(x) - \log_{g(x)} h(x)$	$(f(x)-1)\cdot(g(x)-1)\cdot(h(x)-1)\cdot(g(x)-f(x))$	$h(x)>0,\ f(x)>0, f(x)\neq 1,$ $g(x)>0, g(x)\neq 1$

Теорема 1. Логарифмическое неравенство

$$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x)$$

равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0. \end{cases}$$

Неравенству $\log_{\varphi(x)} f(x) \cdot \log_{\kappa(x)} y(x) < 0$

соответствует равносильная система $\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ \varphi(x) \neq 1 \\ y(x) > 0 \\ \kappa(x) > 0 \\ \kappa(x) \neq 1 \\ (f(x)-1)(\varphi(x)-1)(y(x)-1)(\kappa(x)-1) > 0 \end{cases}$.

Пример 7. Решить неравенство $\log_{x-2}(x^2-1) > \log_{x-2}(2x^2+x-3)$.

<u>Решение.</u> Воспользуемся теоремой 1, получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-2 \neq 1, \\ x^2-1>0, \\ 2x^2+x-3>0, \\ ((x-2)-1)((x^2-1)-(2x^2+x-3))>0. \end{cases}$$

Решая первые четыре неравенства, практически находим ОДЗ исходного неравенства:

$$\begin{cases} x>2, \\ x \neq 3, \\ x<-1 \; \textit{или} \; x>1, \\ x<-\dfrac{3}{2} \; \textit{или} \; x>1. \end{cases}$$

Откуда: $x \in (2,3) \cup (3,+\infty)$.

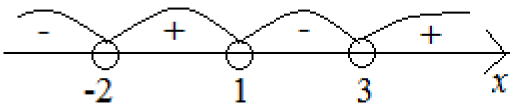
Решим теперь пятое неравенство системы. После элементарных преобразований получим неравенство

$$(x-3)(-x^2-x+2)>0.$$

Умножим второй сомножитель на -1 и поменяем знак неравенства:

$$(x-3)(x^2+x-2)<0.$$

Нетрудно заметить, что корнями второго множителя в этом неравенстве являются числа 1 и -2. Поэтому, раскладывая второй множитель на одночлены первого порядка, получаем:



$$(x-3)(x-1)(x+2)<0.$$

Это неравенство легко решить методом интервалов: $x \in (-\infty,-2) \cup (1, 3)$. С учетом найденного ранее ОДЗ, получаем окончательный ответ.

Ответ: $x \in (2, 3)$.

3. Обобщенный метод интервалов.

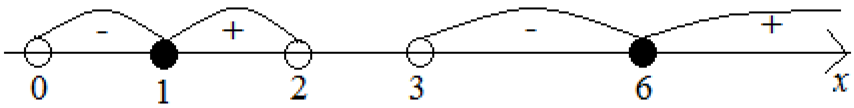
Пример 8. Решить неравенство: $\log_{0,5x}(0,25x^2 - 1,25x + 1,5) \leq 1$.

Решение. Функция $f(x) = \log_{0,5x}(0,25x^2 - 1,25x + 1,5) - 1$ определена и непрерывна при $x \in (0; 2)$ и $(3; +\infty)$.

Найдем ее нули: $\log_{0,5x}(0,25x^2 - 1,25x + 1,5) = 1$, следовательно, $\log_{0,5x}(0,25x^2 - 1,25x + 1,5) = \log_{0,5x} 0,5x$.

Получим квадратное уравнение $0,25(x^2 - 7x + 6) = 0$, корни которого $x_1 = 1$, $x_2 = 6$.

Определяем знаки функции $f(x) = \log_{0,5x}(0,25x^2 - 1,25x + 1,5) – 1$ по методу интервалов:



Ответ: $x \in (0; 1] \cup (3; 6]$.

4. Графический метод.

Решение. Решим пример 8 вторым способом. Найдем точки пересечения графиков $y_1 = 0,5x$ и $y_2 = 0,25x^2 — 1,25x + 1,5$. Приравняем данные функции

$0,25x^2 - 1,25x + 1,5 = 0,5x$,

$0,25(x^2 - 7x + 6) = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$.

Первый график — прямая, второй график — парабола, ветви вверх.

Если $0 < y_1 < 1$, то $\log_{y_1} y_2 \le 1 <=>$ $y_2 \ge y_1 <=> 0 \le x \le 1$.

Если $y_1 > 1$, то $\log_{y_1} y_2 \le 1 <=> 0 <$ $y_2 \le y_1 <=> 3 < x \le 6$.

Значит, $\log_{y_1} y_2 \le 1 <=> x \in (0;1]$ U(3;6].

Ответ: $x \in (0; 1]$ U $(3; 6]$.

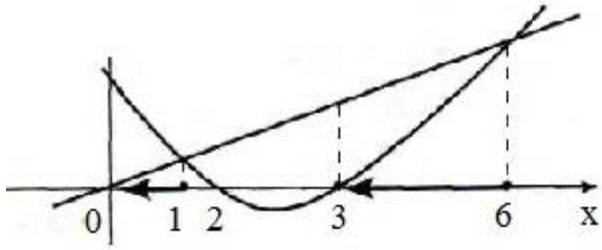


Рис. 6.2

Решение показательно-логарифмических неравенств

Рассматривая показательно-логарифмические уравнения, мы отметили, что для их решения используется метод логарифмирования обеих частей уравнения по одному и тому же основанию. Этот метод применяется и для решения ***показательно-логарифмических неравенств***. Здесь также $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ и переходим от неравенства $f(x) > g(x)$ к неравенству $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, если $a > 1$ и к неравенству $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, если $0 < a < 1$.

Пример 9. Решить неравенство $x^{\log_{0.5} x} > 0{,}5$.

Решение. Обе части этого неравенства принимают лишь положительные значения. Возьмем от обеих частей логарифмы по основанию 0,5, получим неравенство $\log_{0,5} x^{\log_{0,5} x} < \log_{0,5} 0{,}5$ равносильное данному. После преобразования получим $\log_{0,5}^2 x < 1$, откуда $-1 < \log_{0,5} x < 1$, тогда $x \in (0{,}5;\ 2)$ является решением исходного неравенства.

Ответ: $x \in (0{,}5;\ 2)$.

7. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

7.1. Построение графиков тригонометрических функций.

Синусом острого угла φ называется отношение длины катета, противолежащего углу φ, к длине гипотенузы прямоугольного треугольника с острым углом φ, и обозначают $\sin\varphi$. Отношение длины прилежащего к углу φ катета к гипотенузе называется ***косинусом*** угла φ, обозначают $\cos\varphi$. ***Тангенсом*** острого угла φ называется отношение длины катета, противолежащего к углу φ, и катета, прилежащего к этому углу ($\mathrm{tg}\varphi$). Обратное отношение длин катета, прилежащего к углу φ, и катета противолежащего, называется ***котангенсом*** ($\mathrm{ctg}\varphi$).

Кроме синуса, косинуса, тангенса и котангенса используют еще ***секанс*** $\sec\varphi = \dfrac{1}{\cos\varphi}$ и ***косеканс*** $\mathrm{cosec}\,\varphi = \dfrac{1}{\sin\varphi}$.

Выражение, в котором переменная содержится под знаком тригонометрических функций, называется ***тригонометрическим***.

Согласно теореме Пифагора из рисункка (Рис.7.1) следует:

— вершина угла φ прямоугольного треугольника совмещена с началом координат,

— гипотенуза треугольника, являющаяся также и радиусом окружности, равна единице, $r = 1$,

— косинус является проекцией радиуса на ось абсцисс,

— синус является проекцией радиуса на ось ординат.

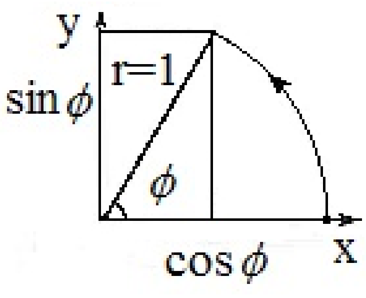
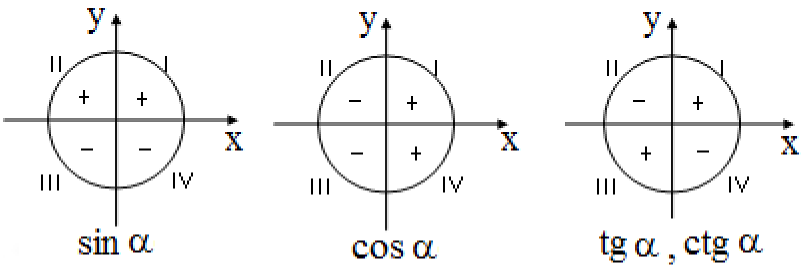


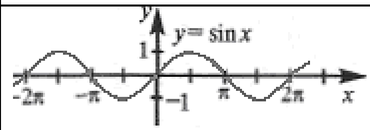
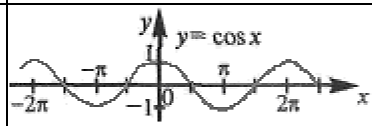
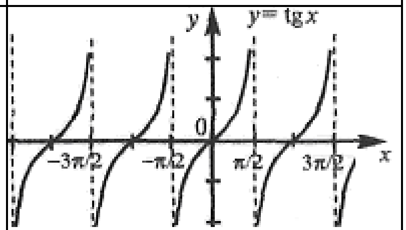
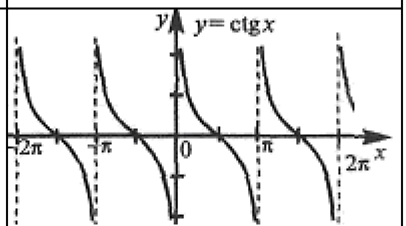
Рис. 7.1

Всё это правильно, но пока только для острых углов, когда радиус-гипотенуза находится в первой четверти.

Знаковая характеристика тригонометрических функций.



Наиболее важные свойства и графики тригонометрических функций

Функция	Область определения	Область значений	Чётность, нечётность	Период, T	Графики функций
y = sin$x$	(–∞, ∞)	[–1, 1]	нечётная	T = 2π	
y = cos$x$	(–∞, ∞)	[–1, 1]	чётная	T = 2π	
y = tg$x$	(–∞, ∞) за исключением точек $\pi n + \pi/2$, здесь n целое	(–∞, ∞)	нечётная	T = π	
y = ctg$x$	(–∞, ∞) за исключением точек πn, здесь n целое	(–∞, ∞)	нечётная	T = π	

Обобщение ситуации на случай любых углов очевидным образом следует из рисунка (Рис. 7.2), а именно, для любых углов косинус, — проекция единичного радиуса на ось абсцисс (Ox),

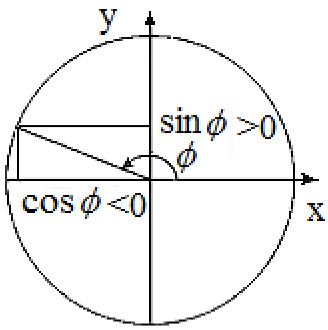


Рис. 7.2

синус — проекция единичного радиуса на ось ординат (Oy), причём в тех случаях, когда проекция попадает в отрицательную область координатных осей, функциям приписывается знак минус.

Функция f(x) называется чётной, если f(–x) = f(x), и нечётной, если f(–x) = –f(x). График чётной функции симметричен относительно оси ординат (Oy), а график нечётной функции симметричен относительно начала координат. Из графиков видно, что косинус является чётной функцией, а синус, тангенс и котангенс — нечётные.

Теорема 1. *1* Если T - основной период функции $f(x)$, то число $\frac{T}{k}$ является основным периодом функции $f(kx+b)$.

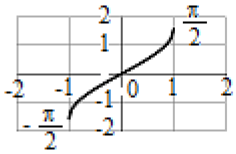
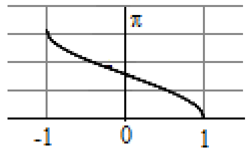
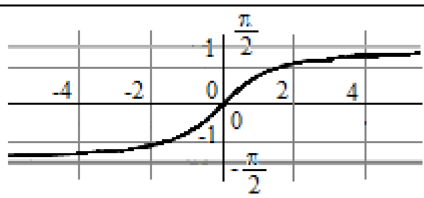
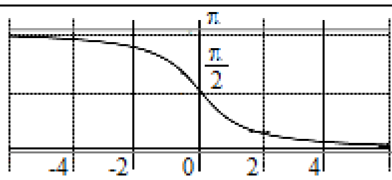
Периоды функций T_1 и T_2 называются соизмеримыми, если существуют натуральные числа m и n, что $mT_1 = nT_2 = T$.

Теорема 2. **2** Если периодические функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, имеют соизмеримые T_1 и T_2, то они имеют общий период $mT_1 = nT_2 = T$, который является периодом функций $f_1(x)+f_2(x)$, $f_1(x)-f_2(x)$, $f_1(x)\cdot f_2(x)$.

В теореме говорится о том, что T является периодом функции $f_1(x)+f_2(x)$, $f_1(x)-f_2(x)$, $f_1(x)\cdot f_2(x)$, и не обязательно является основным периодом. Например, основной период функций $\cos x$ и $\sin x$ - 2π, а основной период их произведения - π.

В отличие от тригонометрических функций обратные тригонометрические функции не являются периодическими.

Наиболее важные свойства и графики обратных тригонометрических функций

Функция	Область определения	Область значений	Чётность, нечётность	Графики функций
$y = \arcsin x$	$x \in [-1;1]$	$y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	нечётная	
$y = \arccos x$	$x \in [-1;1]$	$y \in [0;\pi]$	общего вида $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$	
$y = \text{arctg}\, x$	$x \in (-\infty;\infty)$	$y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	нечётная	
$y = \text{arcctg}\, x$	$x \in (-\infty;\infty)$	$y \in (0;\pi)$	общего вида $\text{arcctg}(-a) = \pi - \text{arcctg}\, a$	

7.2. Преобразование тригонометрических выражений.

Основные тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad tgx \cdot ctgx = 1$$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad 1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Полезны также **формулы приведения**, которые позволяют выразить значения тригонометрических функций для любых углов через значения тригонометрических функций углов первой четверти.

Например: cos(180°+ α) = cos 180°· cosα – sin180°· sinα =

(–1) · cosα – 0 · sinα = – cosα.

Чтобы избежать необходимости пользоваться подобными расчётами, применяют мнемоническое правило:

1. Если вычисляется тригонометрические функции углов 90° ± α или 270° ± α , то синус меняется на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс. В случае углов 180° ± α или 360° ± α функции остаются неизменными, т.е. синус остаётся синусом и т.п.

2. Знак результата такой же, как у исходной функции в той четверти, в которую попадает исходный угол.

Например: cos(180°– α) = – cosα.

Косинус остаётся косинусом, потому что 180°. Исходный угол (180°– α) во второй четверти, где косинус, исходная функция, отрицательна, поэтому знак минус.

Перевод градусной меры угла в радианную и обратно.

Пусть α — градусная мера угла, β — радианная, тогда справедливы формулы: $\beta = \dfrac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}$, $\alpha^\circ = \dfrac{180^\circ \cdot \beta}{\pi}$, где $1 рад \approx 57^0$, $1^0 \approx 0{,}017 рад$, $\pi = 180^0$,

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338832795$.

Формулы сложения и вычитания аргументов:

$$\begin{matrix} \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{matrix}\ ;\quad tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgx\, tgy}.$$

Преобразование суммы (разности) тригонометрических функций в произведение:

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right).$$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$tg\, 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}.$$

Формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad tg^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}.$$

Формулы половинного угла:

$$\sin(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}; \quad \cos(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}};$$

$$tg(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}; \quad ctg(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}};$$

$$tg(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}; \quad ctg(\frac{x}{2}) = \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} = \frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Замена через тангенс половинного угла:

$$\sin(\alpha)=\frac{2tg(\frac{\alpha}{2})}{1+tg^2(\frac{\alpha}{2})};\quad \sin(\alpha)=\frac{2ctg(\frac{\alpha}{2})}{1+ctg^2(\frac{\alpha}{2})};\quad \cos(\alpha)=\frac{1-tg^2(\frac{\alpha}{2})}{1+tg^2(\frac{\alpha}{2})};$$

$$\cos(\alpha)=\frac{ctg^2(\frac{\alpha}{2})-1}{ctg^2(\frac{\alpha}{2})+1};\quad tg(\alpha)=\frac{2tg(\frac{\alpha}{2})}{1-tg^2(\frac{\alpha}{2})};\quad tg(\alpha)=\frac{2ctg(\frac{\alpha}{2})}{ctg^2(\frac{\alpha}{2})-1};$$

$$ctg(\alpha)=\frac{1-tg^2(\frac{\alpha}{2})}{2tg(\frac{\alpha}{2})};\quad ctg(\alpha)=\frac{ctg^2(\frac{\alpha}{2})-1}{2ctg(\frac{\alpha}{2})};$$

Соотношения для обратных тригонометрических функций:

$$\cos(\arccos x)=x;\quad \arccos(\cos x)=x;\quad \sin(\arcsin x)=x;\quad \arcsin(\sin x)=x;$$

$$tg(arctgx)=x;\quad arctg(tgx)=x;\quad ctg(arcctgx)=x;\quad arcctg(ctgx)=x;$$

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2};\quad arctgx+arcctgx=\frac{\pi}{2};$$

$$\sin(\arccos x)=\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2};\quad tg(arcctgx)=ctg(arctgx)=\frac{1}{x}.$$

Для решения задач на упрощение тригонометрических выражений требуется достаточно хорошо знать правила преобразования алгебраических выражений и тригонометрические формулы (уметь применять их как по одной, так и в комплексе).

Пример 1. Упростить: $\dfrac{\cos 7\alpha-\cos 8\alpha-\cos 9\alpha+\cos 10\alpha}{\sin 7\alpha-\sin 8\alpha-\sin 9\alpha+\sin 10\alpha}$.

Решение. Используем формулы преобразования разности тригонометрических функций в произведение:

$$\cos 7\alpha-\cos 8\alpha=2\sin\frac{15\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2},\quad \cos 10\alpha-\cos 9\alpha=-2\sin\frac{19\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin 7\alpha-\sin 8\alpha=-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{15\alpha}{2},\quad \sin 10\alpha-\sin 9\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{19\alpha}{2},$$

получим: $\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{15\alpha}{2}-\sin\frac{19\alpha}{2}\right)}{-2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{15\alpha}{2}-\cos\frac{19\alpha}{2}\right)}=-\dfrac{\sin\frac{15\alpha}{2}-\sin\frac{19\alpha}{2}}{\cos\frac{15\alpha}{2}-\cos\frac{19\alpha}{2}}$

и еще раз, применяя те же самые формулы, имеем:

$$-\frac{2\sin(-\alpha)\cos\frac{17\alpha}{2}}{2\sin\frac{17\alpha}{2}\sin\alpha}=\frac{\cos\frac{17\alpha}{2}}{\sin\frac{17\alpha}{2}}=ctg\frac{17\alpha}{2}.$$

Пример 2. Вычислить: $\dfrac{\cos 68^\circ\cos 8^\circ+\cos 82^\circ\cos 22^\circ}{\cos 53^\circ\cos 23^\circ+\cos 67^\circ\cos 37^\circ}$.

Решение. Используя формулы приведения преобразуем:

$\cos 68^\circ=\cos(90^\circ-22^\circ)=\sin 22^\circ$, $\cos 82^\circ=\cos(90^\circ-8^\circ)=\sin 8^\circ$,

$\cos 53^\circ=\cos(90^\circ-37^\circ)=\sin 37^\circ$, $\cos 67^\circ=\cos(90^\circ-23^\circ)=\sin 23^\circ$,

получим: $\dfrac{\sin 22^\circ\cos 8^\circ+\sin 8^\circ\cos 22^\circ}{\sin 37^\circ\cos 23^\circ+\sin 23^\circ\cos 37^\circ}=\dfrac{\sin(22^\circ+8^\circ)}{\sin(37^\circ+23^\circ)}=\dfrac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}=\dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 3. $tg\alpha=-\frac{3}{4}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $ctg\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $tg 2\alpha$, $ctg 2\alpha$.

Решение. Сразу найдем $ctg\alpha=\dfrac{1}{tg\alpha}=-\dfrac{4}{3}$ и т.к. $tg^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, то выразив $\cos\alpha$, получим $\cos\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1}{tg^2\alpha+1}}$. И, поскольку, α является углом второй четверти, то $\cos\alpha<0$, следовательно $\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{1}{tg^2\alpha+1}}=-\dfrac{4}{5}$. Выразим $\sin\alpha=tg\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$.

Далее воспользуемся формулами двойного угла, получим:

sin2α = 2sinα·cosα = $-\dfrac{24}{25}$, cos2α = cos$^2\alpha$ – sin$^2\alpha$ = $\dfrac{7}{25}$,

$tg2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\dfrac{24}{7}$ и $ctg2\alpha = \dfrac{1}{tg2\alpha} = -\dfrac{7}{24}$.

Пример 4. Вычислить cos(4arctg 5).

<u>Решение.</u> Пусть α = arctg5, тогда tg α = 5. Требуется найти cos4α. Вычислим вначале cos2α, используя универсальную подстановку:

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = \frac{1-25}{1+25} = -\frac{12}{13}.$$

Тогда, используя формулу понижения порядка, получаем:

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{144}{169} - 1 = 2\cdot\frac{144}{169} - 1 = \frac{119}{169}.$$

<u>Ответ:</u> $\dfrac{119}{169}$.

7.3. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.

Тригонометрические уравнения.

Способы решения тригонометрических уравнений:

1. **Решение простейших тригонометрических уравнений**

$$\left.\begin{array}{lll} \sin x = a; & \Rightarrow & x = (-1)^k \arcsin a + \pi k; \\ \cos x = a; & \Rightarrow & x = \pm\arccos a + 2\pi k; \\ tgx = a; & \Rightarrow & x = arctgx + \pi k; \\ ctgx = a; & \Rightarrow & x = arcctgx + \pi k; \end{array}\right. \quad \text{где } k \in Z.$$

Особо отметим некоторые частные случаи элементраных тригонометрических уравнений, когда решение может быть записано без применения общих формул:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, \quad \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad \sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, \quad \cos x = -1 \Rightarrow \quad x = \pi + 2\pi k,$$

$$tgx = 0 \Rightarrow x = \pi k, \quad tgx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad tgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$ctgx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad ctgx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad ctgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,$$

где $k \in Z$.

Пример 5. Решить уравнение $\sin \pi\sqrt{x} = -1$.

Решение. $\pi\sqrt{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathrm{Z}$, тогда $\sqrt{x} = -\frac{1}{2} + 2n, n \in \mathrm{Z}$.

По определению арифметического квадратного корня перейдем к равносильной системе уравнений:

$\sqrt{f(x)} = g(x)$
$\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$, применяя к нашему случаю $\begin{cases} -\frac{1}{2} + 2n \ge 0, n \in \mathrm{Z} \\ x = \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)^2, n \in \mathrm{Z} \end{cases}$.

Получим $\begin{cases} n \ge \frac{1}{4}, n \in \mathrm{Z} \\ x = \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)^2, n \in \mathrm{N} \end{cases}$.

Ответ: $x = \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)^2, n \in \mathrm{N}$

2. Если уравнение в результате сводится **к виду** $\sin y = \sin z$**, либо** $\cos y = \cos z$**, либо** $tgy = tgz$**, либо** $ctgy = ctgz$**,** где y и z - выражения от неизвестного x.

Из этого следует, что

$$\sin y = \sin z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = z + 2\pi k, \\ y = \pi - z + 2\pi k. \end{cases}$$

$$\cos y = \cos z \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm z + 2\pi k.$$

$$tgy = tgz \quad \Leftrightarrow \quad y = z + \pi k.$$

$$ctgy = ctgz \quad \Leftrightarrow \quad y = z + \pi k.$$

Где $k \in Z$.

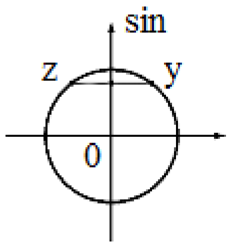


Рис. 7.3

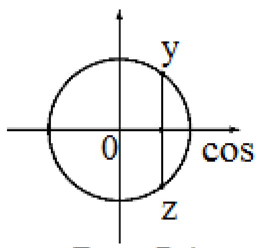


Рис. 7.4

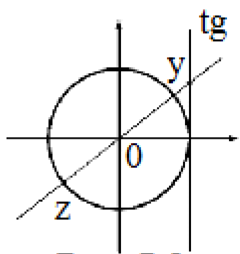


Рис. 7.5

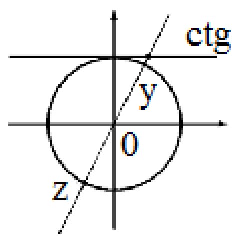


Рис. 7.6

Пример 6. 3 Решить уравнение $\sin 5x = \sin 3x$.

Решение. $\sin 5x = \sin 3x \Leftarrow \left[\begin{array}{l} 5x - 3x = 2\pi n, \\ 5x + 3x = \pi + 2\pi n. \end{array}\right. \Leftarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}. \end{array}\right.$

Ответ: $x_1 = \pi n$, $x_2 = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}$.

3. Применение свойств тригонометрических функций.

Если уравнение имеет вид $f(t)=g(t)$, f и g – составлены из тригонометрических выражений. Решение можно найти среди тех t, которые удовлетворяют уравнениям $f(t)=a$; $g(t)=a$, где a – действительное число, принадлежащее областям значений $f(t)$ и $g(t)$.

Пример 6. Решить уравнение: $\sin^2 4x + \cos^2 x = 2\sin 4x \cos^4 x$.

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$\sin^2 4x - 2\sin 4x \cos^4 x = -\cos^2 x.$$

Добавив к обеим частям $\cos^8 x$, получим

$$\sin^2 4x - 2\sin 4x \cos^4 x + \cos^8 x = \cos^8 x - \cos^2 x,$$

или

$$\left(\sin 4x - \cos^4 x\right)^2 = -\cos^2 x(1 - \cos^6 x).$$

Левая часть неотрицательна, а правая – неположительна. Следовательно, равенство имеет место только при условии

$$\begin{cases} -\cos^2 x(1 - \cos^6 x) = 0; \\ (\sin 4x - \cos^4 x)^2 = 0. \end{cases}$$

Тогда имеем случаи:

1) $\cos^2 x = 0$ или $\cos x = 0$. Откуда $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$.

Полученные значения удовлетворяют и второму уравнению:

$$\sin\left(4\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)\right) = \sin\left(2\pi + 4\pi n\right) = 0.$$

2) $1 - \cos^6 x = 0$ или $\cos x = \pm 1$. Откуда $x = \pi n, \quad n \in Z$.

Подставив эти значения x во второе уравнение, получим

$(\sin 4\pi n - \cos^4 \pi n)^2 = 0$, или $(0-1)^2 = 0$, что неверно.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$.

Пример 7. 4 Решить уравнение $\sin 5x - 2\cos 2x = 3$.

Решение. Поскольку $\sin 5x \le 1,\ -\cos 2x \le 1$, то левая часть не превосходит 3 и равна 3, если $\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases}$

Для нахождения значений x, удовлетворяющих обоим уравнениям, поступим следующим образом. Решим одно из них, затем среди найденных значений отберем те, которые удовлетворяют и другому.

Начнем со второго: $\cos 2x = -1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Тогда $5x = \frac{5\pi}{2} + 5\pi k$,

$\sin 5x = \sin(\frac{5}{2}\pi + 5\pi k) = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi k)$.

Понятно, что лишь для четных k будет $\sin 5x = 1$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Разложение на множители.

Метод разложения на множетели заключается в следующем: если $f(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)$, то всякое решение уравнения $f(x) = 0$ является решение совокупности уравнений $f_1(x) = 0,\ \ f_2(x) = 0,\ \ldots,\ \ f_n(x) = 0$.

Обратное утверждение, вообще говоря неверно: не всякое решение совокупности является решением уравнения. Это объясняется тем, что решения отдельных уравнений могут не входить в область определения функции $f(x)$.

Пример 8. 5 Решить уравнение $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, уравнение представим в виде $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x$,

$$(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=(1-\cos x)(1+\cos x),$$

$$(1+\cos x)(2\sin x-1)=0.$$

Ответ: $x=\pi+2\pi k$; $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$.

4. Решение тригонометрических уравнений с помощью разнообразных тригонометрических формул.

При решении ряда уравнений применяются всевозможные тригонометрические формулы. Рассмотрим некоторые из них.

а) Применение тригонометрических формул преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Пример 9. Решить уравнение: $\dfrac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$.

Решение. Умножим и разделим на $2\sin\dfrac{x}{2}$ и преобразуем:

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(2\cos x\sin\frac{x}{2}+2\cos 2x\sin\frac{x}{2}+2\cos 3x\sin\frac{x}{2}+2\cos 4x\sin\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x+\sin\frac{7}{2}x-\sin\frac{5}{2}x+\sin\frac{9}{2}x-\sin\frac{7}{2}x\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{9}{2}x-\sin\frac{x}{2}\right)=\frac{\sin\frac{9}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}.$$

Знаменатель обращается в ноль при $x=2\pi n,\quad n\in Z$. Но эти числа не являются корнями исходного уравнения. Поэтому исходное уравнение эквивалентно: $\sin\dfrac{9}{2}x=0$. Откуда $x=\dfrac{2}{9}\pi k,\quad k\in Z$. Но $x\neq 2\pi n$, то есть $\dfrac{2\pi k}{9}=2\pi n$, или $k\neq 9n$.

Ответ: $x=\dfrac{2}{9}\pi k,\quad k\neq 9n,\quad n\in Z$.

б) Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму.

Пример 10. 6 Решить уравнение $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$.

Решение. Применив формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, получим равносильное уравнение:

$$\cos x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x = 0 \Leftarrow \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x = 0 \Leftarrow \cos 2x \cos x = 0$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

в) Решение уравнений с применением формул понижения степени.

Пример 11. 7 Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x = 0$.

Решение. Применяя формулу понижения порядка, получим равносильное уравнение.

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} - \frac{1-\cos 6x}{2} - \frac{1-\cos 8x}{2} = 0 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow (\cos 8x - \cos 2x) + (\cos 6x - \cos 4x) \Leftarrow$$

$$\Leftarrow -2\sin 3x \sin 5x - 2\sin x \sin 5x = 0 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow -2\sin 5x(\sin 3x + \sin x) = 0 \Leftarrow -4\sin 5x \sin 2x \cos x = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{5}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

6. Метод введения новых переменных.

Метод введения новых переменных позволяет преобразовать исходное тригонометрическое уравнение в другой тип уравнений. При этом важен выбор основного выражения, через которое выражаются остальные части уравнения. Удобнее сводить к виду, когда также зависимости являются рациональными. В частности обозначим через R(cos*x*, sin*x*) рациональное выражение относительно cos*x* и sin*x*, то есть выражение, получающееся из cos*x* и sin*x* и постоянных с помощью операций сложения, умножения и деления. Конечно, требуется контроль за областью определения и множеством решений.

а) Рассмотрим уравнение вида R(cos*x*, $\sin^{2n} x$)=0 и R($\cos^{2n} x$, sin *x*)=0.

В некоторых случаях удается свести такое уравнение к рациональному уравнению относительно $\sin x$ или $\cos x$. Иногда удобно руководствоваться следующим правилом выбора подстановки. Если $\cos x$ входит в уравнение в четных степенях, то заменяя всюду $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$, получим рациональное уравнение относительно $\sin x$. Если же $\sin x$ входит в уравнение лишь в четных степенях, то замена $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$ приводит уравнение к рациональному виду относительно $\cos x$.

Пример 12. Решить уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x-2\sin 2x+\frac{3}{4}\sin^2 2x=0$.

Решение. $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-2\sin 2x+\frac{3}{4}\sin^2 2x=0$

$$4-2\sin^2 2x-8\sin 2x+3\sin^2 2x=0$$

$$\sin^2 2x-8\sin 2x+4=0$$

Пусть $\sin 2x=y$, тогда $y^2-8y+4=0$

$$y_{1,2}=4\pm 2\sqrt{3}$$

$\sin 2x=4-2\sqrt{3}$ или $\sin 2x=4+2\sqrt{3}$

$2x=(-1)^k\arcsin\left(4-2\sqrt{3}\right)+\pi k, k\in Z$

$x=\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\left(4-2\sqrt{3}\right)+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$

Т.к. $|\sin 2x|\le 1$ при $x\in R$, то корней нет.

Ответ: $x=\frac{1}{2}(-1)^k\arcsin\left(4-2\sqrt{3}\right)+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$.

б) Рассмотрим уравнение вида R(tg *x*, cos ^{2m}x, sin^{2n} *x*)=0.

Если в уравнении встречаются только tg x, четные степени синусов и косинусов, синусы и косинусы двойных углов, то можно прейти к рациональному уравнению с помощью подстановки: $y=tgx$.

Пример 13. Решить уравнение: $(1-tgx)(1+\sin 2x)=1+tgx-\cos 2x$.

Решение. Числа $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ не являются решением. Поэтому рассмотрим исходное уравнение на множестве чисел, где $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.

Тогда по формулам для случая аргумента $2x$ и, положив $y = tgx$:

$$\sin(2\alpha) = \frac{2tg(\alpha)}{1+tg^2(\alpha)} = \frac{2y}{1+y^2}; \quad \cos(2\alpha) = \frac{1-tg^2(\alpha)}{1+tg^2(\alpha)} = \frac{1-y^2}{1+y^2},$$

получим алгебраическое уравнение

$$(1-y)\left(1+\frac{2y}{1+y^2}\right) = 1+y-\frac{1-y^2}{1+y^2}.$$

После преобразований, получим $(1+y)^2(1-2y)=0$.

Корни этого уравнения $y_1 = -1; \quad y_2 = \frac{1}{2}.$

Следовательно, получим два уравнения $tgx = -1$ и $tgx = \frac{1}{2}.$

<u>Ответ:</u> $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = arctg\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

в) Уравнение вида R (sin$x$±cos$x$; sin$x$cos$x$)=0.

Решается следующей заменой $\sin x \pm \cos x = y$, $(\sin x \pm \cos x)^2 = y^2$, $1 \pm 2\sin x\cos x = y^2$, $\pm 2\sin x \cos x = y^2 - 1$.

Пример 14. Решить уравнение $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0, x \in R$.

<u>Решение.</u> $2(\sin x + \cos x) + 2\sin x \cos x + 1 = 0$.

Пусть $\sin x + \cos x = y$, $(\sin x + \cos x)^2 = y^2$, $1 + 2\sin x \cos x = y^2$, $2\sin x \cos x = y^2 - 1$, получим квадратное уравнение:

$y^2 + 2y - 1 + 1 = 0$, $y^2 + 2y = 0$, $y(y+2) = 0$. Корнями его являются

$y = 0$ или $y = -2$.

Сделаем обратную замену:

1) $\sin x + \cos x = 0$.

Так как синус и косинус одновременно не могут быть равны нулю, то разделим на $\cos x \neq 0$, получим

$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -2$, следовательно $tgx = -1$, отсюда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

2) $\sin x + \cos x = -2$, тогда $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}}$.

Так как $\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le 1$, при $x \in R$, то корней нет.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathrm{Z}$

г) Универсальная тригонометрическая подстановка.

Это подстановка $t = tg\frac{x}{2}$. Она позволяет свести к рациональному уравнению любое уравнение R(sin*x*, cos*x*)=0. Если $x \neq \pi + 2\pi\kappa$, $\kappa \in Z$, то справедливы тождества

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

После решения надо проверить отдельно являются ли $x = \pi + 2\pi\kappa$, $\kappa \in Z$, решениями исходного уравнения.

Пример 15. Решить уравнение: $\sin x + 7\cos x + 7 = 0$.

Решение. При универсальной тригонометрической подстановке $tg\frac{x}{2} = t$ получим, что $\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Исходное уравнение сведется к уравнению $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{7(1-t^2)}{1+t^2} + 7 = 0$.

Тогда $t = -7$, то есть $tg\frac{x}{2} = -7$. Следовательно, $x = 2\pi k - 2arctg7,\ k \in Z$.

Однако, здесь имеется ошибка, так как формулы определены для $x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$. То есть область определения исходного уравнения уменьшилась. Поэтому необходимо проверить именно те числа, которые не вошли в область определения выражений:

$$x = \pi + 2\pi k, k \in Z.$$

При этих значениях $\sin x = 0$ и $\cos x = -1$, то есть исходное уравнение превращается в тождество.

Ответ: $x = -2arctg 7 + 2\pi k; \quad x = \pi + 2\pi k, \quad k \in Z$.

д) Однородные тригонометрические уравнения.

Однородное уравнение – это уравнение, в котором каждое слагаемое имеет одну и туже степень.

$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \ldots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$
где $a_0; a_1; a_2; \ldots; a_n$ - действительные числа. n - показатель однородности.

Ясно, что если $a_0 = 0$, то уравнение примет вид:

$$\cos x \left(a_1 \sin^{n-1} x + a_2 \sin^{n-2} x \cdot \cos^1 x + \ldots + a_{n-1} \sin x \cdot \cos^{n-2} x + a_n \cos^{n-1} x \right) = 0,$$

решениями которого являются значения x, при которых $\cos x = 0$, т. е. числа $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$. Второе уравнение, записанное в скобках также является однородным, но степени на 1 ниже. Если же $a_0 \neq 0$, то эти числа не являются корнями уравнения.

И наоборот, при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ получим: $\cos x = 0, \ \sin x = \pm 1$ и в исходном уравнении $a_0 = 0$.

Итак, при $a_0 \neq 0, \ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, следовательно, $\cos x \neq 0$, поэтому можно разделить обе части уравнения на $\cos^n x$. В результате получаем уравнение:

$$a_0 tg^n x + a_1 tg^{n-1} x + a_2 tg^{n-2} x + \ldots + a_{n-1} tg x + a_n = 0,$$

которое, подстановкой $tg x = y$ легко сводится к алгебраическому:

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_{n-1} y + a_n = 0.$$

Однородным тригонометрическим уравнением 1-ой степени называется уравнение вида: $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$.

Пусть, например, $a \neq 0$. Тогда уравнению не удовлетворяют те x, для которых $\cos x=0$. Поделив на $\cos x$ обе части уравнения получим уравнение $a\cdot \mathrm{tg} x+b=0$.

Пример 16. 8 Решите уравнение $2\sin x+3\cos x=0$.

Решение. Это уравнение однородное первой степени $\cos x\neq 0$. Разделим обе его части на $\cos x$ получим: $2tgx+3=0$, $tgx=-\frac{3}{2}$, $x=-\frac{3}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=-\frac{3}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

Однородным уравнением 2-ой степени называется уравнение вида: $a\cdot\sin^2 x+b\cdot\sin x\cdot\cos x+c\cdot\cos x=0$.

Если $a\neq 0$, тогда разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим уравнение $a^2tgx+btgx+c=0$, которое подстановкой $tgx=y$ легко приводится к квадратному: $ay^2+by+c=0$.

Пример 17. $3\sin x+4\cos x=5, x\in \mathrm{Z}$

Решение. $3\sin 2\frac{x}{2}+4\cos 2\frac{x}{2}=5\cdot 1$, заменим 1 на формулу основного тригонометрического тождества:

$$6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+4\cos^2\frac{x}{2}-4\sin^2\frac{x}{2}=5\sin^2\frac{x}{2}+5\cos^2\frac{x}{2}.$$

$$9\sin^2\frac{x}{2}-6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=0$$

Если $\cos\frac{x}{2}=0$, то и $\sin\frac{x}{2}=0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству, значит $\cos\frac{x}{2}\neq 0$. Разделим обе части на $\cos^2\frac{x}{2}\neq 0$, получим $9tg^2\frac{x}{2}-6tg\frac{x}{2}+1=0$,следовательно $\left(3tg\frac{x}{2}-1\right)^2=0$, тогда $tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$.

$$\frac{x}{2}=arctg\frac{1}{3}+\pi n, n\in \mathrm{Z}, \qquad x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n, n\in \mathrm{Z}.$$

Ответ: $x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n, n\in \mathrm{Z}$.

7. Решение тригонометрических уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента.

Рассмотрим уравнение вида: $a\cos x + b\sin x = c$,

1) если $c = 0$, то уравнение однородное.

2) если $c \neq 0$ и $a^2 + b^2 \neq 0$(то есть хотя бы одно из чисел a или b не равно 0), то разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Т. к. $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1; \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ и $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то существует такой угол φ, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, тогда

$$\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

1) если, $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$ т. е. $a^2 + b^2 < c^2$, то корней нет.

2) если, $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ т. е. $a^2 + b^2 \geq c^2$, тогда

$$x + \varphi = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k, k \in Z.$$

$$x = -\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k, k \in Z$$

Пример 18. $3\sin x + 4\cos x = 5, x \in Z$

<u>Решение.</u> Так как $3^2 + 4^2 \geq 5^2$, то корни есть. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3^2+4^2} = 5$, получим $\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = 1$.

Так как $\left|\frac{3}{5}\right| \le 1, \left|\frac{4}{5}\right| \le 1$ и $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, то существует такой угол φ, что $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, а $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, тогда получим $\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x = 1$, применяя формулу сложения аргументов $\sin(x+\varphi) = 1$, следовательно

$$x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \Rightarrow \ x = -\varphi + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z,$$

$$x = -\arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$$

<u>Ответ:</u> $x = -\arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

Тригонометрические неравенства.

-Решение тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности.

При решении тригонометрических неравенств вида $f(x) \ge 0$, где $f(x)$ - одна из тригонометрических функций, удобно использовать тригонометрическую окружность для того, чтобы наиболее наглядно представить решения неравенства и записать ответ. Основным методом решения тригонометрических неравенств является сведение их к простейшим неравенствам типа $\sin x \ge a$. Разберём на примере, как решать такие неравенства.

Пример 19. 9 Решите неравенство $\sin x \ge \frac{1}{2}$.

<u>Решение.</u> Нарисуем тригонометрическую окружность и отметим на ней точки, для которых ордината превосходит $\frac{1}{2}$. Для $x \in [0; 2\pi]$ решением данного неравенства будут $x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$. Ясно

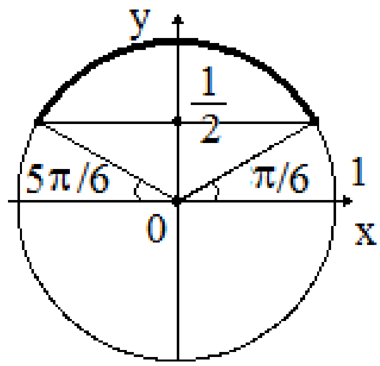


Рис. 7.7

также, что если некоторое число x будет отличаться от какого-нибудь числа из указанного интервала на $2\pi n$, то $\sin x$ также будет не меньше $\frac{1}{2}$. Следовательно, к концам найденного отрезка решения нужно просто добавить $2\pi n$. Окончательно, получаем, что решениями исходного неравенства будут все $x \in [\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n]$.

<u>Ответ:</u> $x \in [\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n]$.

Для решения неравенств с тангенсом и котангенсом полезно понятие о линии тангенсов и котангенсов. Таковыми являются прямые $x = 1$ и $y = 1$ (Рис. 7.8), касающиеся тригонометрической окружности. Легко заметить, что если построить луч с началом в начале координат, составляющий угол α с положительным направлением оси абсцисс, то длина отрезка от точки $(1;0)$ до точки пересечения этого луча с линией тангенсов в точности равна тангенсу угла, который составляет этот луч с осью абсцисс. Аналогичное наблюдение имеет место и для котангенса.

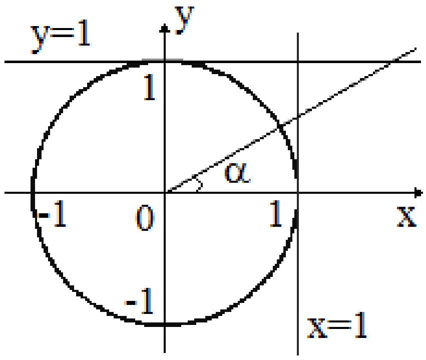


Рис. 7.8

Пример 20. 10 Решите неравенство $tg\left(\pi + \frac{x}{3}\right) + 1 \geq 0$.

<u>Решение.</u> Обозначим $t = tg\left(\pi + \frac{x}{3}\right)$, тогда неравенство примет вид простейшего: $t \geq -1$. Рассмотрим интервал $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ длиной, равной наименьшему положительному периоду тангенса. На этом отрезке с помощью линии тангенсов устанавливаем, что $t \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$. Вспоминаем

теперь, что необходимо добавить πn, поскольку наименьший положительный период функции x $T=\pi$. Итак, $t\in[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n)$.

Возвращаясь к переменной x, получаем, что $\pi+\frac{x}{3}\in[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n)\Rightarrow$

$$\frac{x}{3}\in[-\frac{\pi}{4}-\pi+\pi n;\frac{\pi}{2}-\pi+\pi n)\Rightarrow \frac{x}{3}\in[-\frac{5\pi}{4}+\pi n;-\frac{\pi}{2}+\pi n)\Rightarrow$$

$$x\in[-\frac{15\pi}{4}+3\pi n;-\frac{3\pi}{2}+3\pi n).$$

Ответ: $x\in[-\frac{15\pi}{4}+3\pi n;-\frac{3\pi}{2}+3\pi n)$.

-Неравенства с обратными тригонометрическими функциями удобно решать с использованием графиков обратных тригонометрических функций. Покажем, как это делается на примере.

1. Используя метод интервалов.

Общая схема:

1) С помощью тригонометрических формул разложить на множители.
2) Найти точки разрыва и нули функции, поставить их на окружность.
3) Взять любую точку К (но не найденную ранее) и выяснить знак произведения. Если произведение положительно, то поставить точку за единичной окружностью на луче, соответствующему углу. Иначе точку поставить внутри окружности.
4) Если некоторые точки разных серий совпадают, то их называют кратными. Точки, которые повторяются в четном числе серий, называют точками четной кратности, а те, что повторяются в нечетном числе серий,— точками нечетной кратности. Провести дуги следующим образом: начать с точки К, если следующая точка нечетной кратности, то дуга пересекает окружность в этой точке, если же точка четной кратности, то не пересекает.
5) Дуги за окружностью – положительные промежутки; внутри окружности – отрицательные промежутки.

Пример 21. Решить неравенство: $\cos 3x + \cos x > 0$.

Решение. Применяя формулу перехода от суммы к произведению получим $2\cos 2x \cos x > 0$.

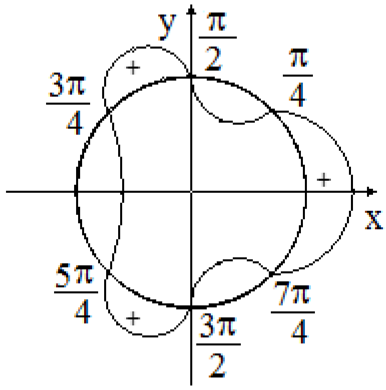


Рис. 7.9

Тогда $\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \cos x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{cases}$

Точки первой серии: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Точки второй серии: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Каждая точка встречается нечетное число раз, то есть все точки нечетной кратности.

Выясним знак произведения при x=0: $2\cos 2x \cos x > 0$.

Отметим все точки на единичной окружности (Рис.7.9):

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z$, $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$,

$-\frac{\pi}{4} + 2\pi l < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi l, \quad l \in Z$.

Пример 22. Решите неравенство $\dfrac{\sin x \sin 3x}{\cos x \sin 2x} > 0$.

$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin 3x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pi n, \quad n \in Z \\ x = \dfrac{\pi k}{3}, \quad k \in Z \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in Z \\ x = \dfrac{\pi m}{2}, \quad m \in Z \end{cases}$

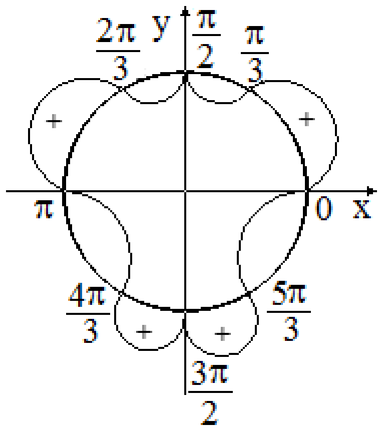


Рис. 7.10

Первая серия: 0; π.

Вторая серия: 0; $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

Третья серия: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Четвертая серия: 0, $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Точки четной кратности: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

При $x=\frac{\pi}{6}$, тогда $\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}}>0$.

Выполним рисунок (рис.7.10).

Ответ: $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x<\pi+2\pi n, \quad n\in Z$; $\frac{4\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k, \quad k\in Z$;;

$3\pi/2+2\pi m<x<5\pi/3+2\pi m, m\epsilon Z; \ 2\pi j<x<\pi/3+2\pi j, j\epsilon Z$

Решение тригонометрических неравенств графическим методом

Заметим, что если $f(x)$ - периодическая функция, то для решения неравенства $f(x)>a$ ($f(x)<$ a) необходимо найти его решения на отрезке, длина которого равна периоду функции $f(x)$. Все решения исходного неравенства будут состоять из найденных значений x, а также всех x, отличающихся от найденных на любое целое число периодов функции $f(x)$.

Пример 23. Решите неравенство $\sin x>a \ (a\in R)$.

<u>Решение.</u> Поскольку $|\sin x|\le 1$, то при $a\ge 1$ неравенство решений не имеет. Если $a<-1$, то множество решений неравенства $\sin x>a$ - множество всех действительных чисел.

Пусть $-1\le a<1$. Функция синус имеет наименьший положительный период 2π, поэтому неравенство $\sin x>a$ можно решить сначала на отрезке длиной 2π, например, на

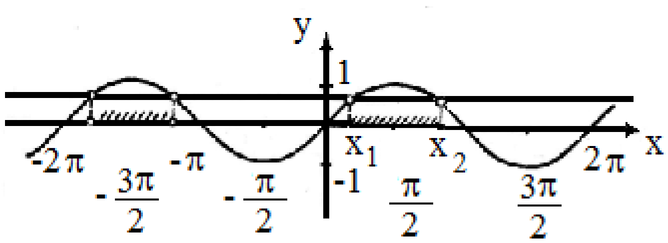


Рис. 7.11

отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. Строим графики функций $y=\sin x$ и $y=a$ $(-1\le a<1)$.

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ функция синус возрастает, и уравнение $\sin x=a$, где $|a|\le 1$, имеет один корень $x_1=\arcsin a$. На отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ функция синус убывает, и уравнение $\sin x>a$ имеет корень $x_2=\pi-\arcsin a$. На числовом промежутке $(x_1;x_2)$ график функции $y=\sin x$ расположен выше графика функции $y=a$. Поэтому для всех x из промежутка $(\arcsin a;\pi-\arcsin a)$ неравенство $\sin x>a$ выполняется, если $-1\le a<1$. В силу периодичности функции синус все решения неравенства $\sin x>a(-1\le a<1)$ задаются неравенствами вида: $\arcsin a+2\pi n<x<\pi-\arcsin a+2\pi n$.

Ответ: $\arcsin a+2\pi n<x<\pi-\arcsin a+2\pi n$.

Аналогично решаются неравенства $\sin x<a$, $\cos x>a$, и т.п.

Пример 24. 11 Решите неравенство $arctg\,x\le\frac{\pi}{6}$.

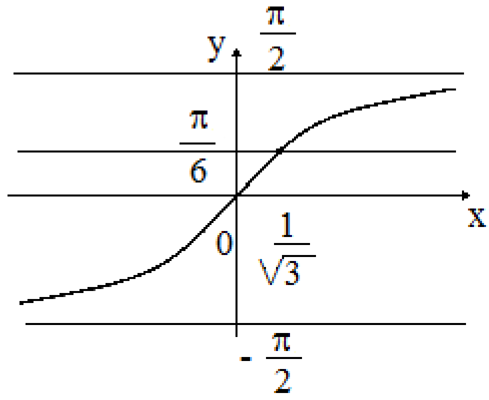


Рис. 7.12

Решение. Нарисуем график функции $y=arctg\,x$. Найдём точку пересечения этого графика с горизонтальной прямой $y=\frac{\pi}{6}$. Это точка с абсциссой $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. По графику видно, что для всех $x\le\frac{1}{\sqrt{3}}$ график функции лежит ниже прямой $y=\frac{\pi}{6}$. Следовательно, эти x и составляют:

Ответ: $x\le\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Сведение к одному или нескольким неравенствам.

В большинстве случаев решение тригонометрических неравенств можно сводить при помощи тождественных тригонометрических преобразований и введения вспомогательных неизвестных к решению одного или нескольких неравенств.

Пример 25. Решить неравенство: $\frac{5}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x > \cos 2x$.

Решение. Преобразуем $5(1-\cos 2x) + 2(1-\cos^2 2x) > 8\cos 2x$.

Тогда $2\cos^2 2x + 13\cos 2x - 7 < 0$. Положив $y = \cos 2x$, получим

$2y^2 + 13y - 7 < 0$.

Решение этого квадратного неравенства – интервал $-7 < y < \frac{1}{2}$.

Тогда имеем $-7 < \cos 2x < \frac{1}{2}$. Неравенство $-7 < \cos 2x$ выполняется при любом x.

Решая неравенство $\cos 2x < \frac{1}{2}$, получим $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \frac{5}{3}\pi + 2\pi n, \quad n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{5}{6}\pi + \pi n, \quad n \in Z$.

8. ПРОИЗВОДНАЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

8.1 Нахождение производной функции.

Определение: Пусть задана функция $y= f(x)$, определенная в некотором интервале. При каждом значении аргумента x в этом интервале функция $y= f(x)$ имеет определенное значение. Если аргумент x получил приращение Δx, то и функция получила некоторое определенное приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Если существует предел отношения

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0$$

то он называется производной функции $f(x)$в точке x и обозначается:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Операция вычисления производной называется дифференцированием функции.

Геометрический смысл производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 - это тангенс угла наклона между осью абсцисс и касательной к графику этой функции, проходящей через точку с абсциссой x_0.

1. Если угол наклона касательной острый, то тангенс положительный, а значит, производная положительна.
2. Если угол наклона касательной тупой, то тангенс отрицательный, а значит, производная отрицательна.
3. Если угол наклона касательной равен нулю, то тангенс равен нулю, а значит, производная равна нулю.
4. Если угол наклона прямой, то тангенс не существует, а значит, производная не существует.

Приведем таблицу производных элементарных функций:

1) $(C)'=0$, $C= Const$

2) $\left(x^{n}\right)' = nx^{n-1}$, $n \in R$, $x > 0$

3) $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$; $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$, $x > 0$

4) $\left(\log_{a} x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$

$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$

5) $\left(\sin x\right)' = \cos x$, $x \in R$

6) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$, $x \in R$

7) $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^{2} x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

8) $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} x}$, $x \neq \pi n$, $n \in Z$

9) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$, $|x| < 1$

10) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$, $|x| < 1$

11) $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^{2}}$, $x \in R$

12) $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^{2}}$, $x \in R$.

Правила вычисление производных.

Производная суммы двух функций: $(u + v)' = u' + v'$.

Производная произведения постоянной и функции: $(Cu)' = Cu'$.

Производная произведения двух функций: $(uv)' = u'v + uv'$.

Производная частного двух функций: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^{2}}$.

Производная сложной функции $y=f(g(x))$: $f'(g(x)) = f'(g) \cdot g'(x)$.

Производная функции вида $y=f(ax+b)$:

$y' = f'(ax+b) = f'(ax+b)\cdot(ax+b)' = a\cdot f'(ax+b)$.

8.2 Исследование функции на экстремум. Интервалы возрастания, убывания, выпуклости, вогнутости. Асимптотика.

Общая характеристика функции.

Если каждому значению переменной x из множества X по некоторому правилу поставлено в соответствие единственное вполне определенное значение y, то переменную y называют *функцией* от x. Записывают $y = f(x), x \in X, y \in Y$ или $f : X \to Y$. Говорят ещё, что функция отображает множество X на множество Y.

Множество X называется областью определения функции и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется множеством значений функции и обозначается $E(f)$. x – независимая переменная величина или аргумент, y – функция или зависимая переменная.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D называется *четной*, если для любого $x \in D$ выполняется условие $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$; *нечетной,* если для любого $x \in D$ выполняется условие $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, нечетной – относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической* на множестве D, если существует такое число $T>0$, что при каждом значении $x \in D$ $(x+T) \in D$ и $f(x+T) = f(x)$. При этом число T называется *периодом функции*.

Возрастание и убывание функции.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* в интервале $(a;b)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, если $f(x_2) \geq f(x_1)$, функция называется *неубывающей*.

Иными словами – значения возрастающей функции увеличиваются одновременно со значением аргумента.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* в интервале $(a;b)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$, если $f(x_2) \leq f(x_1)$, функция называется *невозрастающей*.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции называются *монотонными*. А возрастающие и убывающие – *строго монотонными*.

Пусть задана функция $f(x)$. Возьмем две точки на промежутке $[a,b]$ x_1 и x_2 при условии, что $x_2 > x_1$. Тогда функция называется возрастающей на промежутке $[a,b]$, если $f(x_2) > f(x_1)$. Функция называется убывающей на промежутке $[a,b]$, если $f(x_2) < f(x_1)$.

Если функция дифференцируема на определенном промежутке и производная функции в точке $x = c$ положительна, то на этом промежутке она возрастает.

Действительно, согласно теореме Лагранжа, если $x_2 > x_1$ и $f'(c) > 0$, то функция возрастает (Рис. 8.1).

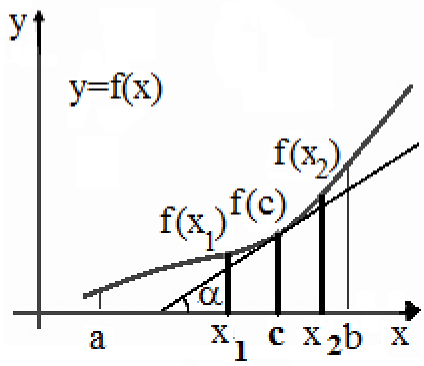


Рис. 8.1

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f'(c)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1),$$

$$f(x_2) > f(x_1),$$

т.е. если левая часть равенства положительна, где $x_1 < c < x_2$ и $f'(c) > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

При убывании функции можно сделать аналогичный вывод.

Если функция дифференцируема на определенном промежутке и производная функции в

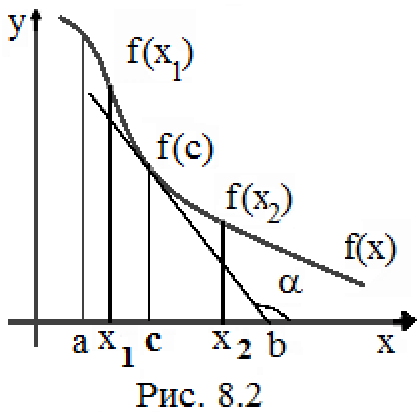


Рис. 8.2

точке $x = c$ отрицательна, то на этом промежутке она убывает (Рис. 8.2). Опять же, согласно теореме Лагранжа, если $x_1 < c < x_2$ и $f'(c) < 0$, то функция убывает.

$$f'(c)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1),$$

$$f(x_2) < f(x_1).$$

Экстремум функции.

Если функция $f(x)$ определена на определенном промежутке и существует такая точка А на этом промежутке, что $f(x) < f(\text{А})$ во всех точках окрестности точки А, то данная точка называется точкой максимума (Рис. 8.3).

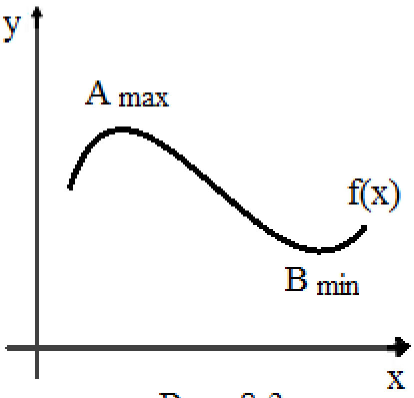


Рис. 8.3

Если функция $f(x)$ определена на определенном промежутке и существует такая точка В на этом промежутке, что $f(x) > f(\text{В})$ во всех точках окрестности точки В, то данная точка называется точкой минимума (Рис. 8.3).

Точки максимума и минимума называются точками *экстремума*, а значения функции в этих точках – *экстремумами функции*.

Касательная к графику функции в данных точках параллельна оси ОХ.

Теорема (Ферма – необходимое условие экстремума). Если x_0 - точка экстремума для функции $y = f(x)$, то в этой точке производная функции либо равна нулю $(f'(x_0) = 0)$, либо не существует.

Точки области определения функции $f(x)$, в которых ее производная не существует или равна нулю, называются *критическими точками* функции.

Здесь нужно отметить, что не во всех критических точках функция имеет экстремум. Например функция $y = x^3$ не имеет экстремума, т.к. не выполняется условие $f(x)$ <(>) $f(x_0)$, т.е. в окрестности точки x_0 значение функции должно быть больше (меньше) значения функции в точке x_0. Таким образом, функция $y = x^3$ имеет критическую точку при x=0 (т.к. $f'(0)=0$), но экстремума в этой точке нет.

В силу теоремы Ферма экстремумы функции находятся среди ее критических точек.

Первое достаточное условие экстремума. Если при переходе (слева направо) через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с (+) на (-), то точка x_0 является точкой максимума; если с (-) на (+), то точкой минимума; если знака не меняет, то экстремума нет.

Второе достаточное условие экстремума. Пусть в точке x_0 производная равна нулю $f'(x_0)=0$, а вторая производная $f''(x_0)\neq 0$. Тогда, если $f''(x_0)>0$, то x_0 - точка минимума; если $f''(x_0)<0$, то x_0 - точка максимума.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба.

Пусть задана функция $y = f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема на определенном промежутке $[x_1;x_3]$.

Возьмем промежуток $[x_1; x_2]$. Тогда, если при любом значении x таком, что $x_1<x<x_2$, значение функции меньше значения касательной в точке x, т.е. $f_ф(x) \leq f_к(x)$, то функция выпукла вверх (Рис. 8.4). График функции называется выпуклым на промежутке $[x_1; x_2]$, если он расположен ниже касательной, проведенной в любой точке этого интервала.

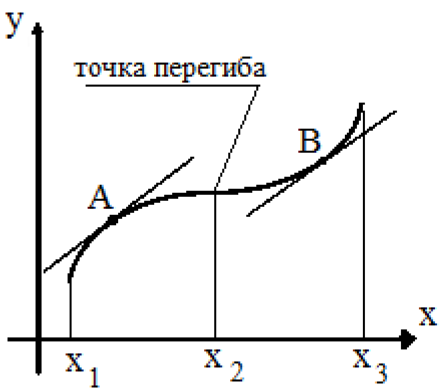


Рис. 8.4

Возьмем промежуток $[x_2; x_3]$. Тогда, если при любом значении x таком, что $x_2<x<x_3$, значение функции больше значения касательной в точке x, т.е. $f_ф(x) \geq f_к(x)$, то функция выпукла вниз (Рис. 8.4). График функции называется вогнутым на промежутке $[x_2; x_3]$, если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала.

Если функция выпукла вверх, то вторая производная функции меньше нуля, т.е. $f''(x) < 0$.

Если функция выпукла вниз, то вторая производная функции больше нуля, т.е. $f''(x) > 0$.

Первое достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ имеет первую производную в точке x_0 и вторую производную в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может самой точки). Тогда если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то x_0 - точка перегиба.

Второе достаточное условие точки перегиба. Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет производные до третьего порядка включительно. Тогда если $f''(x_0)=0$, а $f'''(x_0)\neq 0$, то x_0 – точка перегиба этой функции.

Асимптоты графика функции.

Прямая линия *m* называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние *d* от точки *M*, лежащей на этом графике, до прямой *m* стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику от начала координат в бесконечность.

Асимптоты бывают трех видов: вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* (Рис. 8.5) графика функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ равен бесконечности.

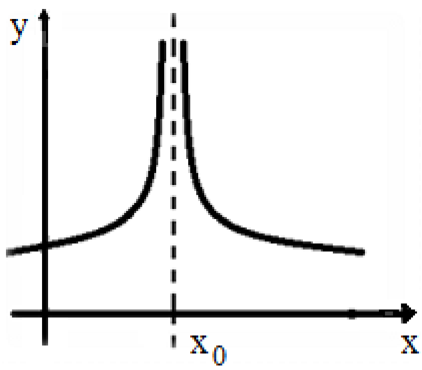


Рис. 8.5

Обычно вертикальными асимптотами являются прямые в точках разрыва 2-го рода.

Поэтому для отыскания вертикальных асимптот определяют точки $a_1, a_2, .. a_n$ бесконечного разрыва функции. Тогда уравнение вертикальных асимптот

$x=a_1, x=a_2,...,x=a_n$. Вертикальные асимптоты могут быть и на границе области определения функции. Например, как у функции $y=\ln x$.

Прямая $y=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* (Рис. 8.6) графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$), если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0$ (соответственно, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(kx+b))=0$).

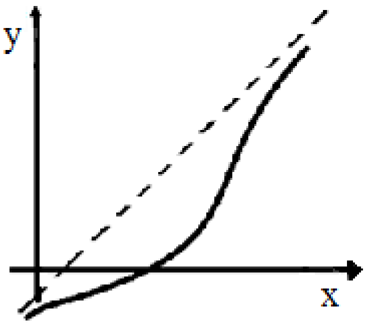


Рис. 8.6

Уравнение наклонной асимптоты к графику функции $y=f(x)$ ищем виде $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{и } b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx).$$

Если хотя бы один из пределов k и b не существует или равен бесконечности, то кривая $y=f(x)$ наклонной асимптоты не имеет. Асимптоты графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов k и b следует отдельно рассматривать случай, когда $x\to+\infty$ и когда $x\to-\infty$.

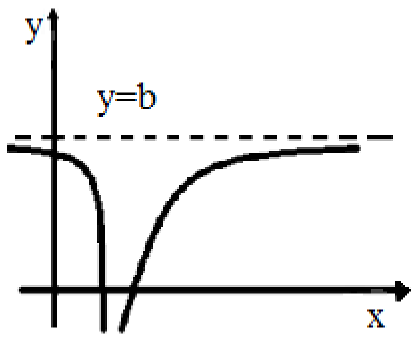


Рис. 8.7

Частным случаем наклонной асимптоты (при $k=0$) является *горизонтальная асимптота* (Рис. 8.7).

Прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$) тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ (соответственно, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$).

8.3 Полное исследование функции. Построение графика функции.

Порядок исследования

I. Общая характеристика функции.

1.1. Область определения функции.

1.2. Поведение функции в окрестностях точек разрыва.

1.3. Точки пересечения графика с осями координат.

1.4. Симметрия графика.

1.5. Периодичность графика.

II. Интервалы монотонности и экстремумы функции.

2.1. Нахождение первой производной функции.

2.2. Определение критических точек.

2.3. Нахождение интервалов монотонности.

2.4. Определение экстремумов функции.

III. Интервалы выпуклости и вогнутости.

3.1. Вычисление второй производной функции.

3.2. Определение точек перегиба.

3.3. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости.

IV. Наклонные асимптоты графика функции.

V. График функции.

Пример 1. Исследовать функцию $y=\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение.

I. Общая характеристика функции.

1.1. Функция не определена, если $x-1=0,\ (x=1)$

Область определения: $x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$.

1.2. Т.к. $x=1$- точка разрыва функции исследуем поведение функции в этой точке слева и справа

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}=+\infty$$

Т.к. пределы равны ∞ значит $x=1$ точка разрыва второго рода.

Следовательно, прямая $x=1$- вертикальная асимптота.

1.3. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат

с ОХ: y=0 при x= -2;

с OY: x=0 при y=2.

Найдем промежутки знакопостоянства функции

$$y<0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}<0 \Rightarrow x+2<0 \Rightarrow x\in(-\infty;\,-2);$$

$$y>0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}>0 \Rightarrow x+2>0 \Rightarrow x\in(-2;1)\cup(1;+\infty)$$

1.4. Проверим функцию на четность, нечетность.

$$f(-x)=\frac{(-x+2)^3}{4(-x-1)^2}=-\frac{(x-2)^3}{4(x+1)^2}$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. общего вида.

1.5. Функция не является периодической.

II. Интервалы монотонности и экстремумы функции.

2.1. Найдем точки экстремума функции и промежутки монотонности.

$$y'=\frac{3(x+2)^2(x-1)^2-2(x-1)(x+2)^3}{4(x-1)^4}=\frac{(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^3}.$$

2.2. Найдем все точки из области определения функции $y=f(x)$, в которых производная y' обращается в ноль или не существует.

$$y'=0 \quad \text{при } x_1=-2,\ x_2=7;$$

y' не существует при x=1

2.3. Составим таблицу

x	(-∞; -2)	-2	$(-2;1)$	1	(1; 7)	7	(7; +∞)
y'	+	0	+	не существует	-	0	+
y	↗	0	↗	не существует	↘	≈5	↗
	возрас-		возрас-		убыва-	min	возрастает

	тает		тает		ет		

2.4. Функция возрастает на интервалах (-∞; -2) , $(-2;\,1)$, (7; +∞) и убывает на интервале (1; 7). Точка $x=7$ есть точка минимума $y_{\min} = y(7) = \frac{729}{144}$.

III. Интервалы выпуклости и вогнутости.

3.1. Найдем точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости функции

$$y'' = \frac{\left[2(x+2)(x-7)+(x+2)^2\right](x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^6} = \frac{54(x+2)}{4(x-1)^4} = \frac{27(x+2)}{2(x-1)^4}$$

3.2. Найдем все точки из области определения функции $y = f(x)$, в которых производная y' обращается в ноль или не существует.

$y'' = 0$ при x=-2

y″ не существует при x=1.

3.3. Составим таблицу

x	(-∞; -2)	-2	$(-2;\,1)$	1	$(1;\,+\infty)$
y''	-	0	+	не существует	+
y	$\cap$	0	$\cup$	не существует	$\cup$

Точка $(-2;\,0)$- точка перегиба.

IV. Наклонные асимптоты графика функции.

Найдем наклонные асимптоты $y = kx+b,$ где

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)^3}{4x(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{4};$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4}x\right] = [\infty-\infty] = \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} =$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+6x^2+12x+8-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=2.$$

$y=\dfrac{1}{4}x+2$ - наклонная асимптота.

Для $x\to-\infty$ k и b вычисляются аналогично.

V. График функции.

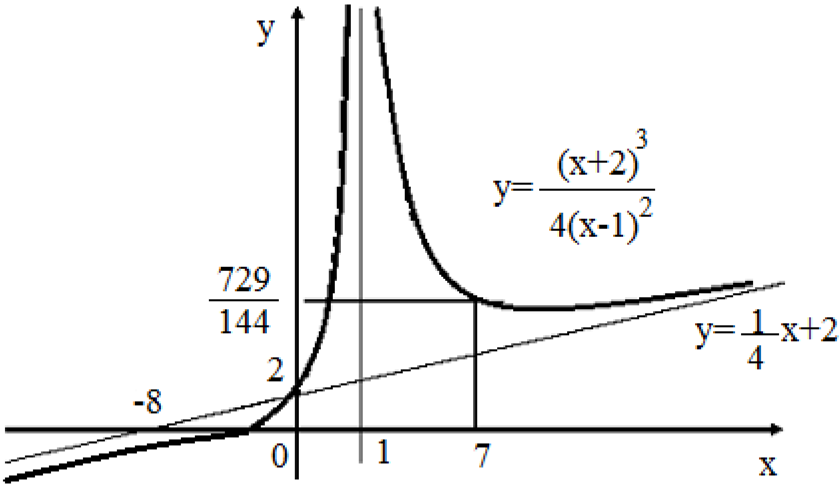


Рис. 8.8

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веселаго И.А. Алгебра для школьников и абитуриентов. 2-е изд., испр. и доп. — М.: Физматлит, 2007. — 336 с.
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике/ М.Я. Выгодский.– Москва: АСТ: Астрель, 2010.–703с.
3. Математика для поступающих в вузы. Шарыгин И.Ф. 6-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2006. - 479 с.
4. Краткий курс высшей математики: учебник/ К.В. Балдин [и др.].–Москва: ДашковиКº, 2012.–510с.
5. Кудрявцев В.А.,Демидович Б.П.Краткий курс высшей математики.–М.: Наука,-1989. - 656с.
6. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высшаяшкола, -1996, 479с
7. Соболев А.Б.,Вигура М.А., Рыбалко А.Ф., Рыбалко Н.М. Элементарная математика: Учебное пособие. - Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. - 81 с
8. Иванов О. А. Элементарная математика для школьников, студентов ипреподавателей. — М., 2009. — 384 с.: ил.
9. Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. Будак А.Б., Щедрин Б.М. 3-е изд., перераб. и доп. М.: УНЦ ДО, 2001. 690 с.
10. Элементарная математика. Учебное пособие для старшеклассников и абитуриентов. Ч.1. Хорошилова Е.В. М.: Изд-во МГУ, 2010. – 472 с.
11. Элементарная математика. Учебное пособие для старшеклассников и абитуриентов. Ч.2. Хорошилова Е.В. М.: Изд-во МГУ, 2010. – 435 с.